

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET
LINJÄR ANALYS, MA 318
5 POÄNG, DEN 17 AUGUSTI 2007, 9.00-14.00
Examinator: B.Shapiro

Inga hjälpmedel tillåtna. Totala antalet poäng är 23. Återlämning på måndag den 27 augusti kl. 12.00 - 13.00 i rum 210, hus 6. Därefter hos Tom Wollecki.

1. A) (2 POÄNG) BESTÄM KOSINUSSERIEN FÖR

$$f(x) = x^2 + 1, \quad 0 < x < 1.$$

B) (2 POÄNG) MED HJÄLP AV DENNA SERIE BERÄKNA SUMMAN $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

2. A) (3 POÄNG) BESTÄM LÖSNINGEN TILL RANDVÄRDESPROBLEMET

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin \frac{x}{2}. \end{cases}$$

B) (1 POÄNG) ANGE ETT LIKNANDE RANDVÄRDESPROBLEM PÅ INTERVALLET $[0, 2\pi]$ VARS LÖSNING SAMMANFALLER MED DEN I A) PÅ INTERVALLET $[0, \pi]$.

3. (4 POÄNG) BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENFUNKTIONERNA TILL STURM-LIOUVILLEPROBLEMET

$$\begin{cases} x^2 X'' + xX' + \lambda X = 0 \text{ på } [1, e^2] \\ X(1) = X(e^2) = 0. \end{cases}$$

Tips. Använd koordinatbytet $x = e^s$.

4. A) (3 POÄNG) FRAMSTÄLL FUNKTIONEN $f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ SOM KOSINUSINTEGRAL $\int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$.

B) (1 POÄNG) BERÄKNA $\int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} d\alpha$.

5. (2 POÄNG) A) BESTÄM c SÅDANT ATT FUNKTIONERNA $f_1 = x^2 + c - 1$ OCH $f_2 = \frac{1}{x+1}$ BLIR ORTOGONALA PÅ $[1, 2]$ RELATIVT DEN VANLIGA SKALÄRPRODUKTEN.

B) (1 POÄNG) NORMALISERA f_1 AND f_2 . (UTTRYCKET FÖR $\|f_1\|$ BLIR INTE SPECIELLT SNYGGT.)

6. (4 POÄNG) MED HJÄLP AV D'ALEMBERTS FORMEL VISA ATT LÖSNINGEN
TILL

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 5x, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

ÄR ENTYDIG.

LYCKA TILL!

TRIGONOMETRISKA FORMLER:

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$