Facit till Linjär analys, den 17 augusti 2007.

1. a) (2 poäng) Bestäm kosinusserien för

$$f(x) = x^2 + 1,\ 0 < x < 1.$$

Lösning. Man bestämmer kosinusserien för x^2 och adderar den med 1. Man får, $x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi n x$ där för $n \geq 1$ $a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx = 2[\frac{x^2 \sin \pi n x}{\pi n}|_0^1 - \int_0^1 2x \frac{\sin \pi n x}{\pi n} dx = \frac{-4}{\pi n}[x(\frac{-\cos \pi n x}{\pi n})|_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos \pi n x}{\pi n}] = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$. Däremot $a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Alltså, $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n \cos \pi n x}{n^2}$.

Svar. $x^2 + 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n \cos \pi n x}{n^2}$.

b) (2 poäng) Med hjälp av denna serie beräkna summan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Lösning. Om man sätter $x = 0$ i serien för x^2 då fås $0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Slutligen, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \pi^2(\frac{1}{4} - \frac{1}{3})$.
Svar. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}$.

2. a) 3 poäng) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 3 \sin \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Lösning. Man separerar variablerna $U = XT$ och får två Sturm-Liouvillesproblem

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \text{ och } T' + 4\lambda T = 0.$$

Första problemet har spektrum $\alpha_n = \frac{2n+1}{2}$, $n = 0, 1, ...$ och egenfunktionerna $X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)x}{2}$. Andra problemet har motsvarande lösning $T_n(t) = e^{-4(\frac{(2n+1)}{2})^2 t} = e^{-(2n+1)^2 t}$. Man söker den lösning på formen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t)$ som uppfyller villkoret $u(x,0) = 3 \sin \frac{x}{2}$. Det är lätt att se att alla koefficienterna blir 0 förutom $a_1 = 3$.

Svar. $u(x,t) = 3 \sin \frac{x}{2} e^{-t}$.

b) (1 poäng) Ange ett liknande randvärdesproblem på intervallet $[0, 2\pi]$ vars lösning sammanfaller med den i A) på intervallet $[0, \pi]$.

Lösning. I exemplet 3 på sidan 133 i boken finns det ett påstående att om man utvidgar funktionen $f(x)$ i villkoret $u(x,0) = f(x)$ symmetriskt m.a.p. punkten π till intervallet $[0, 2\pi]$ och byter villkoret $u_x(\pi, 0) = 0$ mot $u(2\pi, 0) = 0$ då fås det problem som vi söker.

3. (4 poäng) Bestäm egenvärden och egenfunktionerna till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} x^2X'' + xX' + \lambda X = 0 \text{ på } [1, e^2] \\ X(1) = X(e^2) = 0. \end{cases}$$

Tips. Använd koordinatbytet $x = e^s$.

Lösning. Med variabelsubstitution $x = e^s$ går det ursprungliga S-L-problemet över till

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2) = 0. \end{cases}$$

Det sistnämnde problemet har spektrum $\alpha_n = \frac{\pi n}{2}$, $n \geq 1$ och egenfuktionerna $X_n(s) = \sin \frac{\pi n s}{2}$. Med avseende på den ursprungliga koordinaten x fås $X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{2} \ln x)$.

4. a) (3 poäng) Framställ funktionen $f(x) = \begin{cases} \sin 3x, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ som kosinusintegral $\int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$.

Lösning. Man vet att $A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \cos \alpha s ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3s \cos \alpha s ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(3+\alpha)s + \sin(3-\alpha)s] ds = \frac{1}{\pi} [\frac{-\cos \frac{\pi(3+\alpha)}{2} + 1}{3+\alpha} + \frac{-\cos \frac{\pi(3-\alpha)}{2} + 1}{3-\alpha}] = \frac{1}{\pi(9-\alpha^2)} [-(\alpha-3) + (\alpha+3) + (\alpha-3)(\cos \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2}) - (\alpha+3)(\cos \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2})] = \frac{6 + (\alpha-3)\sin \frac{\pi\alpha}{2} + (\alpha+3)\sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(9-\alpha^2)} = \frac{2(3 + \alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2})}{\pi(9-\alpha^2)}$

Svar. $A(\alpha) = \frac{2(3+\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2})}{\pi(9-\alpha^2)}$.

b) (1 poäng) Beräkna $\int_0^\infty A(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} d\alpha$.

Lösning. Man har att $\int_0^\infty A(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} d\alpha = \frac{f(\frac{\pi}{2}+) + f(\frac{\pi}{2}-)}{2} = -\frac{1}{2}$.

5. (2 poäng) a) Bestäm c sådant att funktionerna $f_1 = x^2 + c - 1$ och $f_2 = \frac{1}{x+1}$ blir ortogonala på $[1, 2]$ relativt den vanliga skalärprodukten.

Lösning. $\int_1^2 \frac{x^2+c-1}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{c}{x+1} dx = \int_1^2 (x-1) dx + c \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{2}|_1^2 + c \ln|x+1||_1^2 = \frac{1}{2} + c(\ln \frac{3}{2}) = 0$. Alltså, $c = \frac{-1}{2(\ln \frac{3}{2})}$.

Svar. $c = \frac{1}{\ln \frac{4}{9}}$.

b) (1 poäng) Normalisera f_1 and f_2. (Uttrycket för $||f_1||$ blir inte speciellt vakert.)

Lösning. $||f_1||^2 = \int_1^2 (x^2 - 1 + c)^2 dx = \int_1^2 (x^2-1)^2 dx + 2c \int_1^2 (x^2-1) dx + \int_1^2 c^2 dx = \frac{x^5}{5}|_1^2 - 2\frac{x^3}{3}|_1^2 + x|_1^2 + 2c(\frac{x^3}{3}|_1^2 - x|_1^2) + c^2 x|_1^2 = \frac{31}{5} - \frac{14}{3} + 1 + 2c\frac{4}{3} + c^2 = \frac{38}{15} + \frac{8c}{3} + c^2 = \frac{38}{15} + \frac{8}{3 \ln \frac{4}{9}} + \frac{1}{\ln^2 \frac{4}{9}}$.

$||f_2||^2 = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1}|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

De normaliserade egenfunktionerna är $\frac{f_1}{||f_1||}$ och $\frac{f_2}{||f_2||}$.

6. (4 POÄNG) MED HJÄLP AV D'ALEMBERTS FORMEL VISA ATT LÖSNINGEN TILL

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin 5x, \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

ÄR ENTYDIG.

LÖSNING. DETTA PROBLEM HAR LÖSNINGEN $u(x,t) = \frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ DÄR $F(z)$ ÄR UDDA π-PERIODISKA UTVIDGNINGEN AV $\sin 5x$ DVS FUNKTIONEN $\sin 5x$ SJÄLV. ALLTSÅ $u(x,t) = \frac{\sin 5(x+t)+\sin 5(x-t)}{2} = \sin 5x \cos 5t$. ENLIGT EN SATS PÅ S. 333 I BOKEN FÖR ENTYDIGHETEN AV DEN SISTNÄMNDE LÖSINGEN TILL VÅGEKVATIONEN RÄCKER DET OM $u(x,t)$ TILLHÖR KLASSEN C^2, DVS ÄR 2-GÅNGER KONTINUERLIGT DERIVERBAR. DETTA VILLKOR ÄR UPPENBART UPPFYLLD FÖR $\sin 5x \cos 5t$.