

Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet
 Linjär analys
 7.5 poäng, den 22 oktober 2008, 9.00-14.00
 Examinator: B.Shapiro

1. a) (2 poäng) Bestäm Fourierserieutveckling för

$$f(x) = |\sin x|, \quad |x| < \pi.$$

b) (1 poäng) Beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
 c) (2 poäng) Beräkna summan $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n^2-1)^2}$.

2. a) (3 poäng) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, & t > 0, 0 < x < l \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}.$$

Tips. $u = y(t)U(x, t)$.

b) (1 poäng) Bestäm lösningen ifall $\phi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

3. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, -1 < x < 1 \\ u(-1, t) = u(1, t) = u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

där

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & \text{ifall } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ifall } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

a) (2 poäng) med variabelseparation; b) (2 poäng) med d'Alemberts formel.

4. a) (3 poäng) Bestäm egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouvillesproblemet

$$\begin{cases} xX'' + \frac{1}{2}X' + \lambda X = 0 & \text{på } [0, 1] \\ X(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

Tips. $x = t^2$.

b) (1 poäng) Formulera ortogonaliteten hos de ovanstående egenfunktionerna och kontrollera den direkt.

5. (3 poäng) Framställ funktionen $f(x) = e^{-a|x|} \cos bx$, $a > 0$ som Fourierintegral.

6. a) (3 poäng) Visa att om f är kontinuerlig, deriverbar och 2π -periodisk så är dess Fourierserie absolutkonvergent.

b) (1 poäng) Formulera entydighetssatsen hos lösningar till vågekvationen.

Tentaåterlämning sker den 29 oktober, kl. 12.00-12.45 i mitt rum 210, hus 6. Därefter kan man hämta sin skrivning i rum 208. Lycka till.

Department of Mathematics
Stockholm University
Fourier Analysis (Linjär analys)
7.5 points, October 22, 2008, 9.00-14.00
Examinator: B.Shapiro

1. a) (2 pt) Find the Fourier series on $(-\pi, \pi)$ for the function:

$$f(x) = |\sin x|.$$

- b) (1 pt) Calculate the sum: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

- c) (2 pt) Calculate the sum: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n^2-1)^2}$.

2. a) (3 pt) Solve the boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, & t > 0, 0 < x < l \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & u(x, 0) = \phi(x). \end{cases}$$

Hint. $u = y(t)U(x, t)$.

- b) (1 pt) Find its solution for $\phi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

3. Solve the boundary value problem:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, -1 < x < 1 \\ u(-1, t) = u(1, t) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

where

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & \text{där } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{där } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

- a) (2 pt) using separation of variables; b) (2 pt) using d'Alembert's formula.

4. a) (3 pt) Find the eigenvalues and the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on $[0, 1]$:

$$\begin{cases} xX'' + \frac{1}{2}X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

Hint. $x = t^2$.

- b) (1 pt) Formulate the orthogonality property for the eigenfunctions and check it directly.

5. (3 pt) Represent the function $f(x) = e^{-a|x|} \cos bx$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ as a Fourier integral.

6. a) (3 pt) Show that if f is 2π -periodic, continuous and has continuous first derivative then its Fourier series is absolutely convergent.

- b) (1 pt) Formulate the uniqueness theorem for solutions of the wave equation.

You will get your graded exams back on Wednesday, Oct. 29, 12.00-12.45 in my office 210, building 6. After this date you can pick up your exams in room 208. If you prefer to write your solutions in Swedish you are welcome to do this. Good luck!