Department of Mathematics, Stockholm University
Fourier analysis (Linjär analys), MA 318
7.5 points, January 12, 2009, 9.00-14.00
Examinator: B.Shapiro

1. *a) (2 pt) Find the sine series for*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{cx}{\alpha}, & \text{where } 0 < x < \alpha \\ c, & \text{where } \alpha < x < \pi - \alpha \\ \frac{c(\pi - x)}{\alpha}, & \text{where } \pi - \alpha < x < \pi. \end{cases}$$

b) (2 pt) Using the termwise integration of $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ *find the Fourier series for* x^2 *och* x^3.

2. *(4 pt) Solve the boundary value problem*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

3. *(4 pt) Solve the boundary value problem*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 < x < p,\ 0 < y < s \\ u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0, \quad u(x,0) = A, \quad u(x,s) = Bx. \end{cases}$$

4. *a) (3 pt) Find the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem*

$$\begin{cases} ((3+x)^2 y')' + \lambda X = 0; \quad \text{on } [-2,1] \\ y(-2) = y(1) = 0. \end{cases}$$

b) (1 pt) Is the operator $Ly = (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y$ *self-adjoint?*

5. *a) (3 pt) Represent the function* $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \textit{for } 0 < x < 1 \\ 0, & \textit{for } 1 < x < \infty. \end{cases}$
as the Fourier sine integral.

b) (1 pt) Calculate $\int_0^\infty \frac{(\alpha - \sin\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha}{\alpha^2}$.

6. *(4 pt) A function* f *is defined on the whole* x*-axis and differentiable. Show that under the assumption that* f *och* f' *are absolutely integrable one has that*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

You will get your graded exams back on Monday, January 19, 12.00-12.45 in my office 210, building 6. After this date you can pick up your exams in room 208. If you prefer to write your solutions in Swedish you are welcome to do this. Good luck!

Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet
Linjär analys, MA 318
7.5 poäng, den 12 januari 2009, 9.00-14.00
Examinator: B.Shapiro

1. a) (2 poäng) Bestäm Fouriersinusutvecklingen för

$$f(x) = \begin{cases} \frac{cx}{\alpha}, & \text{där } 0 < x < \alpha \\ c, & \text{där } \alpha < x < \pi - \alpha \\ \frac{c(\pi - x)}{\alpha}, & \text{där } \pi - \alpha < x < \pi. \end{cases}$$

b) (2 poäng) Med termvis integration av $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ *bestäm Fourierutvecklingen för* x^2 *och* x^3.

2. (4 poäng) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

3. (4 poäng) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s \\ u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0, \quad u(x,0) = A, \quad u(x,s) = Bx. \end{cases}$$

4. a) (3 poäng) Bestäm egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} ((3+x)^2 y')' + \lambda X = 0; \quad \text{på } [-2,1] \\ y(-2) = y(1) = 0. \end{cases}$$

b) (1 poäng) Är operatorn $Ly = (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y$ *självadjungerande?*

5. a) (3 poäng) Framställ funktionen $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{där } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{där } 1 < x < \infty. \end{cases}$
som Fouriersinusintegral.

b) (1 poäng) Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{(\alpha - \sin\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha}{\alpha^2}$.

6. (4 poäng) En funktion f *är definierad på hela* x*-axeln och deriverbar. Visa att under förutsätningen att* f *och* f' *är absolutintegrerbara gäller att*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Tentaåterlämning sker den 19 januari, kl. 12.00-12.45 i mitt rum 210, hus 6. Därefter kan man hämta sin skrivning i rum 208. Lycka till.