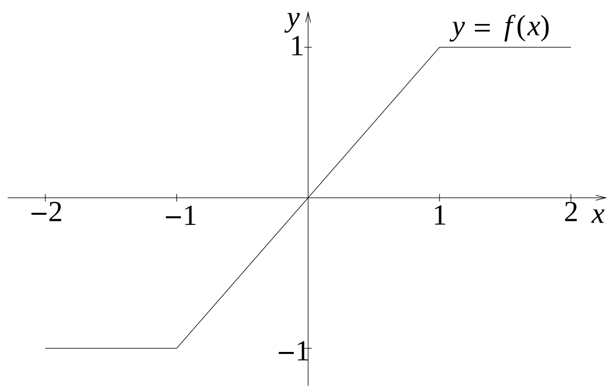
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sara Maad Sasane

Tentamensskrivning i
Linjär analys
7,5 hp
2009-12-16

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Resultat från en deluppgift får användas i påföljande deluppgifter, även om den tidigare deluppgifter inte behandlats. Motivera noggrant. Betygsgränser A: 90–100 poäng, B: 75–89 poäng, C: 65–74 poäng, D: 55–64 poäng, E: 50–54 poäng, Fx: 40–49 poäng, F: 0–39 poäng. För godkänt krävs minst betyg E på den skriftliga tentamen och godkänt på den obligatoriska inlämningsuppgiften.
Lycka till!

1. Låt f vara funktionen vars graf visas i figur 1. Bestäm Fourierserien till f på intervallet $(-2, 2)$. 10 p



Figur 1: Grafen till f

2. a) Bestäm cosinusserien för $f(x) = x^2$ på intervallet $0 < x < \pi$. 10 p

   b) Motivera varför serien du bestämde i deluppgift a) konvergerar punktvis till x^2 på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$. 4 p

   c) Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{och att} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6 p

3. a) Visa att

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} \cos(\alpha x)\, d\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

10 p

   b) Bestäm Fouriercosinusintegralen till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

   d.v.s. bestäm $A(\alpha)$ så att

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos(\alpha x)\, d\alpha.$$

5 p

VAR GOD VÄND!

4. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar och 2π-periodisk och att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Visa Wirtingers olikhet, d.v.s.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx,$$

och att olikheten är en likhet om och endast om $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, där A och B är konstanter. *Ledning: Du får använda att om g är en funktion som är styckvis kontinuerlig på $\mathbb{R}$ så är Parsevals formel uppfylld, d.v.s.*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

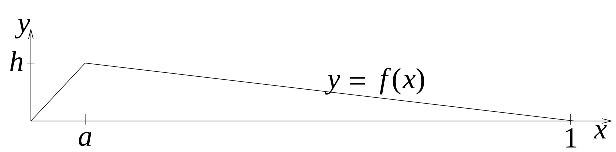
där a_n och b_n är de vanliga Fourierkoefficienterna till g på intervallet $[-\pi, \pi]$. 10 p

5. En sträng av längd 1 är sträckt mellan $x = 0$ och $x = 1$ på x-axeln. Strängen spänns så att den får profilen $y = f(x)$, där f är funktionen vars graf visas i bild 2 och släpps sedan vid tiden $t = 0$. Vi antar att strängens vertikala avvikelse y från x-axeln i punkten x och vid tidpunkt t bestäms av vågekvationen

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

där c är en positiv konstant, tillsammans med rand- och begynnelsevillkoren

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$



Figur 2: Funktionen f beskriver begynnelsevärdena till y.

a) Bestäm sinusserien för f på intervallet $[0, 1]$, och visa att serien konvergerar likformigt till f på detta intervall. 5 p

b) Använd variabelseparation för att visa att

$$y(x,t) = \frac{2h}{\pi^2 a(1-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi a)\cos(n\pi ct)\sin(n\pi x)$$

är en formell lösning till detta randvärdesproblem. 10 p

c) Använd trigonometriska formler och en sats om punktvis konvergens av Fourierserier för att visa att den formella lösning som erhållits i deluppgift a) konvergerar likformigt till

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(F(x - ct) + F(x + ct)),$$

där F är den udda periodiska utvidgningen till f av period 2. 5 p

VAR GOD VÄND!

d) Visa att y från deluppgift c) löser vågekvationen för alla $(x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$ sådana att $(x \pm a \pm ct)/2 \notin \mathbb{Z}$ (för alla fyra kombinationer av $\pm$), och att de givna begynnelse- och randvillkoren är uppfyllda. 4 p

e) Låt $c = 1$ och $h = a = 0.1$. Rita ögonblicksbilder för lösningen $y(x,t)$, för $x \in [0,1]$ och $t = 0$, $t = 0{,}2$, $t = 0{,}4$. 6 p

6. a) Låt $u(r,t)$ beteckna temperaturen i ett sfäriskt skal $1 \leq r \leq b$, där r är den radiella koordinaten och skalet från början har temperaturen $u(r,0) = f(r)$. Både den inre och den yttre randen $r = 1$ och $r = b$ hålls vid konstant temperatur noll. Temperaturen i skalet följer värmeledningsekvationen, vilken i sfäriska koordinater utan ϕ- och θ-beroende kan skrivas

$$u_t = \frac{k}{r}(ru)_{rr} \qquad (1 < r < b,\ t > 0),$$

där k är en positiv konstant. Visa formellt att temperaturen i skalet då $t > 0$ är

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\pi\frac{r-1}{b-1}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{(b-1)^2}t\right),$$

där

$$B_n = \frac{2}{b-1}\int_1^b r f(r) \sin\left(n\pi\frac{r-1}{b-1}\right) dr.$$

Ledning: Variabelbytet $X(r) = rR(r)$ kan vara till hjälp för att lösa en av de ekvationer som uppkommer vid variabelseparationen. 10 p

b) Vad blir temperaturutvecklingen i skalet om begynnelsetemperaturen är

$$f(r) = \frac{1}{r}\sin\left(\pi\frac{r-1}{b-1}\right), \qquad (1 < r < b)?$$

5 p

Skrivningsåterlämning måndagen den 21 december, klockan 12.45–13.00, rum 311, hus 6; därefter hos Reine Elfsö i rum 208, hus 6.