MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sara Maad Sasane

Tentamensskrivning i
Linjär analys
7,5 hp
2010-01-11

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Resultat från en deluppgift får användas i påföljande deluppgifter, även om den tidigare deluppgifter inte behandlats. Motivera noggrant. Betygsgränser A: 90–100 poäng, B: 75–89 poäng, C: 65–74 poäng, D: 55–64 poäng, E: 50–54 poäng, Fx: 40–49 poäng, F: 0–39 poäng. För godkänt krävs minst betyg E på den skriftliga tentamen och godkänt på den obligatoriska inlämningsuppgiften.
Lycka till!

1. Låt $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ vara funktionen som definieras av $f(x) = 1 - x/\pi$.

   a) Bestäm cosinusserien till funktionen f på intervallet $(0, \pi)$. 10 p

   b) Visa att serien du bestämde i a) konvergerar punktvis till f på $[0, \pi]$. Konvergerar den även likformigt på detta intervall? Motivera! 6 p

   c) Serien från deluppgift a) konvergerar på hela $\mathbb{R}$ till en funktion F där $F(x) = f(x)$ då $x \in [0, \pi]$. Rita grafen till F på intervallet $[-5\pi, 5\pi]$. 4 p

   d) Beräkna
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$
   3 p

2. Betrakta funktionen f som är definierad på intervallet $[-\pi, \pi]$ och beskrivs av formeln
   $$f(x) = e^x + e^{-x}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$
   Denna funktion har Fourierserien
   $$f(x) \equiv \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx)\right) \qquad -\pi < x < \pi.$$
   (Du behöver inte visa detta).

   a) Använd en sats om derivering av fourierserier för att bestämma fourierserien till f' på intervallet $(-\pi, \pi)$. Motivera varför satsen är tillämpbar. 10 p

   b) Rita graferna till f och f' på intervallet $(-\pi, \pi)$. 5 p

   c) Notera att $f''(x) = f(x)$ på $(-\pi, \pi)$ men att serien som uppkommer då man deriverar fourierserien till f' termvis inte sammanfaller med fourierserien till f. Förklara varför. 5 p

3. Låt f definieras av
   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{då } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

VAR GOD VÄND!

a) Skriv f som en fouriersinusintegral, d.v.s. finn $B(\alpha)$ sådan att

$$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha)\sin(\alpha x)\,d\alpha$$

då $x \neq \pm 1$. 10 p

b) Vad är värdet av integralen i a) då $x = \pm 1$? 5 p

4. Man kan visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$$

konvergerar för varje $x \in \mathbb{R}$. (Du behöver inte göra det.) Visa att denna serie inte är fourierserien till någon styckvis kontinuerlig funktion f. *Ledning: Använd Bessels olikhet.* 12 p

5. Betrakta värmeledningsekvationen $u_t = ku_{xx}$ för $x \in (0, \pi)$ och $t \geq 0$, med randvillkoren

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \sin^4(x), \qquad x \in (0,\pi).$$

a) Lös det givna randvärdesproblemet. *Ledning: Du får använda den trigonometriska formeln*

$$\sin^4(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

utan bevis. 10 p

b) Vad är $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$? Tolka detta resultat då u betecknar temperaturen i en oändlig skiva $0 < x < \pi$, $-\infty < y < \infty$ med isolerade sidor. 10 p

6. Låt $u(\rho,\phi)$ beteckna jämviktstemperaturen i en tunn diskformad platta som beskrivs av $\rho \leq 1$ i polära koordinater. Diskens rand $\rho = 1$ hålls vid konstant temperatur $f(\phi)$. Funktionen u är begränsad i disken och uppfyller Laplaces ekvation som i polära koordinater ges av

$$\rho^2 u_{\rho\rho}(\rho,\phi) + \rho u_\rho(\rho,\phi) + u_{\phi\phi}(\rho,\phi) = 0, \qquad 0 < \rho < 1,\ -\pi < \phi < \pi,$$

där $u(1,\phi) = f(\phi)$ och $u(\rho,-\pi) = u(\rho,\pi)$, $u_\phi(\rho,-\pi) = u_\phi(\rho,\pi)$.

Använd variabelseparation för att lösa detta randvärdesproblem. *Ledning: Variabelbytet $\rho = e^s$ kan användas för att lösa en av ekvationerna som uppkommer vid variabelseparationen.* 15 p

Skrivningsåterlämning hos Reine Elfsö i rum 208, hus 6.