MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sara Maad Sasane

Tentamensskrivning i
Linjär analys
7,5 hp
2010-08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Resultat från en deluppgift får användas i påföljande deluppgifter, även om den tidigare deluppgifter inte behandlats. Motivera noggrant. Betygsgränser A: 90–100 poäng, B: 75–89 poäng, C: 65–74 poäng, D: 55–64 poäng, E: 50–54 poäng, Fx: 40–49 poäng, F: 0–39 poäng. För godkänt krävs minst betyg E på den skriftliga tentamen och godkänt på den obligatoriska inlämningsuppgiften.
Lycka till!

1. Låt $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ vara funktionen som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ 1 & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

   a) Bestäm Fourierserien till funktionen f på intervallet $(-\pi, \pi)$. 10 p

   b) Serien från deluppgift a) konvergerar på hela $\mathbb{R}$ till en funktion F där $F(x) = f(x)$ då $x \in (-\pi, 0)$ eller $x \in (0, \pi)$. Rita grafen till F på intervallet $[-5\pi, 5\pi]$. I figuren ska det framgå vad F har för värde i punkterna $n\pi$, $n = -5, \dots, 5$. 5 p

2. Funktionen f som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{då } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{då } 0 < x < \pi \end{cases}$$

   har en Fourierserie

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x).$$

   Använd detta faktum och en sats om integrering av Fourierserier för att bestämma Fourierserien till funktionen

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{då } -\pi < x < 0 \\ x & \text{då } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

   Ange varför satsen är tillämpbar. 10 p

3. a) Finn en ortornormerad mängd bestående av två polynom av högst grad 1 på intervallet $[0, 2]$ med avseende på den inre produkten

$$(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x)\,dx.$$

   Ledning: Gram–Schmidt. 10 p

   b) Hitta det polynom p av högst grad 1 som minimerar integralen

$$\int_0^2 (e^x - p(x))^2\,dx.$$

   Ledning: Tänk på en ortogonal projektion. 10 p

4. Bestäm Fouriersinusintegralen till funktionen

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x > 0,$$

d v s bestäm $B(\alpha)$ så att

$$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha)\sin(\alpha x)\,d\alpha.$$

15 p

5. Låt D_N vara Dirichletkärnan som definieras av

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx).$$

a) Visa att

$$\int_0^\pi D_N(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

5 p

b) Visa att

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{2\sin(x/2)}.$$

10 p

6. a) Låt u vara en harmonisk funktion i kvadraten $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, d v s $\Delta u = 0$ i denna kvadrat. På randen uppfyller u randvillkoren

$$\begin{cases} u(x,0) &= 0, \\ u(x,1) &= \sin(2\pi x), \\ u(0,y) &= 0, \\ u(1,y) &= 0. \end{cases}$$

Bestäm u i hela kvadraten. 15 p

b) Låt v uppfylla samma ekvation i kvadraten, men med randvärdena

$$\begin{cases} v(x,0) &= \sin(2\pi x), \\ v(x,1) &= \sin(2\pi x), \\ v(0,y) &= \sin(2\pi y), \\ v(1,y) &= \sin(2\pi y). \end{cases}$$

Bestäm v i hela kvadraten. 10 p

Skrivningsåterlämning fr o m 19 augusti hos Reine Elfsö i rum 208, hus 6.