MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sara Maad Sasane

Tentamensskrivning i
Linjär analys
7,5 hp
2010-12-18

*Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Resultat från en deluppgift får användas i påföljande deluppgifter, även om den tidigare deluppgifter inte behandlats. Motivera noggrant. Betygsgränser A: 90–100 poäng, B: 75–89 poäng, C: 65–74 poäng, D: 55–64 poäng, E: 50–54 poäng, Fx: 45–49 poäng, F: 0–44 poäng. För godkänt krävs minst betyg E på den skriftliga tentamen och godkänt på den obligatoriska inlämningsuppgiften. Om en student får Fx på den skriftliga tentamen och har gjort den skriftliga inlämningsuppgiften i tid, så får studenten möjlighet att komplettera med en skriftlig inlämningsuppgift för att i stället erhålla betyg E.*
*Lycka till!*

1. Bestäm Fourierserien till funktionen $f(x) = x$ på intervallet $(-1, 1)$. 8 p

2. a) Bestäm cosinusserien för funktionen $f(x) = \sin(x)$ på intervallet $(0, \pi)$. 7 p

   b) Visa att Fourierserien i deluppgift a) konvergerar punktvis på hela $\mathbb{R}$ till en funktion $F$. 7 p

   c) Visa att Fourierserien till $f$ kan deriveras punktvis, och att man då erhåller Fourierserien till en funktion som konvergerar på hela $\mathbb{R}$ till en funktion $G$. 7 p

   d) Rita graferna till $F$ och $G$ från deluppgifterna b) och c) på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. Indikera speciellt värdena för funktionerna i eventuella diskontinuitetspunkter. 6 p

3. Ett rör med radie 1 och längd 10 ligger längs $x$-axeln. Vi antar att röret har isolerade ytor så att jämviktstemperaturen i röret uppfyller Laplaces ekvation, som i cylindriska koordinater $x$ och $\theta$ ges av

$$u_{xx} + u_{\theta\theta} = 0.$$

   a) Antag att ändarna på cylindern hålls vid temperaturen 0 (vid $x = -5$) respektive $f(\theta)$ (vid $x = 5$). Använd separation av variabler för att bestämma jämviktstemperaturen (d.v.s. temperaturen efter lång tid) i röret. 15 p

   b) Om temperaturen hålls vid $f(\theta)$ då $x = 5$ och $g(\theta)$ då$x = -5$, vad blir jämviktstemperaturen då? 5 p

4. Randvärdesproblemet

$$x^2u'' + xu' + \lambda u = 0 \qquad x \in (1, c), \quad u(1) = u(c) = 0$$

   är ett Sturm–Liouvilleproblem, vilket kan ses om man multiplicerar ekvationen med $1/x$ och skriver om de två första termerna som derivatan av en produkt.

   a) Bestäm egenvärdena och egenvektorerna explicit. *Ledning: Ekvationen är en Cauchy–Euler ekvation, och kan därför lösas om man byter oberoende variabel till $s$, där $x = e^s$.* 8 p

   b) Verifiera att egenfunktionerna är ortogonala med avseende på den inre produkten

$$(f, g) = \int_1^c f(x)g(x)\frac{1}{x}\,dx.$$

   Normera sedan egenfunktionerna för att hitta en ortonormal mängd $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. 7 p

5. Visa att

$$e^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2/2} \cos(\alpha x)\, d\alpha, \qquad x \in \mathbb{R},$$

d.v.s. visa att $A(\alpha) = e^{-\alpha^2/2}\sqrt{2/\pi}$ i cosinusintegralen för $f$. *Ledning: Låt $f(x)$ vara högerledet i ekvationen ovan. Beräkna $f'(x)$ och använd partiell integration för att visa att $f$ uppfyller differentialekvationen $f'(x) = -xf(x)$ tillsammans med begynnelsevillkoret $f(0) = 1$. Använd en integrerande faktor för att visa att detta begynnelsevärdesproblem har en unik lösning, $f(x) = e^{-x^2/2}$.* 15 p

6. En oändligt lång lina sträcker sig längs $x$-axeln. Vi antar att temperaturutvecklingen i linan beskrivs av värmeledningsekvationen

$$u_t = ku_{xx}$$

med $k = 1$, och att lösningen är begränsad, d.v.s. $|u(x,t)| \leq M$ för något $M > 0$ och alla $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Använd variabelseparation för att bestämma temperaturutvecklingen för $t > 0$ i linan om begynnelsetemperaturen ges av funktionen $f(x) = e^{-x^2/2}$ för $x \in \mathbb{R}$. *Ledning: Du får använda resultatet från uppgift 5.* 15 p

*Skrivningsåterlämning hos mig i rum 213, hus 6, den 22 december kl. 13.00–13.30, och därefter hos Reine Elfsö i rum 208, hus 6.*