MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Linjär analys
Avd. Matematik	7,5 hp
Examinator: Sara Maad Sasane	2011-01-10

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Resultat från en deluppgift får användas i påföljande deluppgifter, även om den tidigare deluppgifter inte behandlats. Motivera noggrant. Betygsgränser A: 90–100 poäng, B: 75–89 poäng, C: 65–74 poäng, D: 55–64 poäng, E: 50–54 poäng, Fx: 45–49 poäng, F: 0–44 poäng. För godkänt krävs minst betyg E på den skriftliga tentamen och godkänt på den obligatoriska inlämningsuppgiften. Om en student får Fx på den skriftliga tentamen och har gjort den skriftliga inlämningsuppgiften i tid, så får studenten möjlighet att komplettera med en skriftlig inlämningsuppgift för att i stället erhålla betyg E.
Lycka till!

1. Bestäm Fourierserien till funktionen $f(x) = \sin(x/2)$ på intervallet $(-\pi, \pi)$. 10 p

2. a) Visa att sinusserien för funktionen $f(x) = 1$ på intervallet $(0, \pi)$ är

$$1 \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}, \qquad (0 < x < \pi)$$

10 p

b) Bestäm cosinusserien för funktionen $g(x) = x$ på intervallet $(0, \pi)$ genom att integrera serien från deluppgift a) termvis från 0 till x. Motivera varför det är tillåtet att göra på det sättet. 10 p

c) När du bestämde konstanttermen i b), så bestämde du också värdet av en viss talserie. Skriv ned detta samband explicit. 5 p

3. En inhomogen värmeledningsekvation kan användas för att modellera värmeledning när värme genereras i ett material. Vi antar här att den genererade värmen är konstant 1 i materialet, och vi studerar ekvationen i området $0 < x < \pi$ och $t > 0$. Ekvationen blir då

$$u_t = ku_{xx} + 1, \qquad (0 < x < \pi, t > 0)$$

och vi antar att ändpunkterna hålls vid konstant temperatur 0 så att vi får randvillkoren $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Vidare antar vi att temperaturen vid $t = 0$ är $u(x, 0) = -x^2/k$, där k är konstanten som förekommer i ekvationen ovan.

a) Eftersom ekvationen är inhomogen fungerar det inte att direkt använda separation av variablerna i ekvationen ovan. Inför den nya funktionen $v(x, t) = u(x, t) - \Phi(x)$, och bestäm Φ så att ekvationen för v uppfyller den homogena värmeledningsekvationen

$$v_t = kv_{xx}, \qquad (0 < x < \pi, \quad t > 0)$$

med rand- och begynnelsevillkor

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0,$$
$$v(x, 0) = f(x)$$

för någon funktion f. Bestäm denna funktion f. 10 p

b) Lös ekvationen för v och använd denna lösning för att bestämma u. 10 p

4. Ett trigonometriskt polynom är en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ på formen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\lambda_n x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

där $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ och $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Rummet TP av trigonometriska polynom är ett vektorrum över $\mathbb{C}$ med avseende på punktvis addition och skalär multiplikation (behöver ej visas).

a) Visa att formeln

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}dx$$

definierar en inre produkt på TP, d.v.s. för $f, g, h \in TP$ och $a, b \in \mathbb{C}$ gäller

(i) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$,

(ii) $\langle af + bg, h\rangle = a\langle f, h\rangle + b\langle g, h\rangle$,

(iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$ med likhet om och endast om $f = 0$,

där $\overline{c} = a - ib$ betecknar det komplexa konjugatet av talet $c = a + ib \in \mathbb{C}$. 10 p

b) För $\lambda \in \mathbb{R}$, låt $e_\lambda \in TP$ vara det trigonometriska polynomet

$$e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Visa att mängden $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ är ortonormal i TP. 10 p

5. Visa att

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \sin(\alpha x)\, dx, \qquad x > 0.$$

För full poäng krävs en motivering varför representationen är giltig, t.ex. genom hänvisning till lämplig sats. 15 p

6. Bestäm en begränsad lösning till $\Delta u = 0$, $x, y > 0$ med randvärdena

$$u(x, 0) = e^{-x},$$
$$u(0, y) = 0.$$

Ledning: Det går bra att använda resultatet från uppgift 5. 10 *p*

Skrivningsåterlämning hos mig i rum 213, hus 6, den 14 januari kl. 13.00–13.30, och därefter hos Reine Elfsö i rum 208, hus 6.