MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sara Maad Sasane

Tentamensskrivning i
Linjär analys
7,5 hp
2011-08-12

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Resultat från en deluppgift får användas i påföljande deluppgifter, även om den tidigare deluppgifter inte behandlats. Motivera noggrant. Betygsgränser A: 90–100 poäng, B: 75–89 poäng, C: 65–74 poäng, D: 55–64 poäng, E: 50–54 poäng, Fx: 45–49 poäng, F: 0–44 poäng. För godkänt krävs minst betyg E på den skriftliga tentamen och godkänt på den obligatoriska inlämningsuppgiften. Om en student får Fx på den skriftliga tentamen och har gjort den skriftliga inlämningsuppgiften i tid, så får studenten möjlighet att komplettera med en skriftlig inlämningsuppgift för att i stället erhålla betyg E.
Lycka till!

1. a) Bestäm cosinusserien till funktionen $f(x) = x$ på intervallet $(0, \pi)$. 10 p

   b) Rita grafen till funktionen som representeras av denna serie på intervallet $(-5\pi, 5\pi)$. 5 p

2. Funktionen $f(x) = x^4$ har Fourierserien

$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2\pi^2 - 6}{n^4}\cos(nx)$$

   på intervallet $(-\pi, \pi)$. Detta kan användas utan bevis.

   a) Visa genom att referera till lämplig sats att serien ovan konvergerar (till någon funktion) på hela reella linjen. 10 p

   b) Använd resultatet från deluppgift a) för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

   Du får använda utan bevis att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

   5 p

3. Värmeledning i ett cylindriskt skal beskrivs av cylindriska koordinater $-\pi < \phi \leq \pi$ och $0 < z < 1$ $(\rho = 1)$ med ekvationen

$$u_t = k(u_{zz} + u_{\phi\phi}).$$

   Vid jämvikt är $u_t = 0$ och jämviktstemperaturen uppfyller Laplaces ekvation

$$u_{zz} + u_{\phi\phi} = 0$$

   i skalet. Vi antar att temperaturen vid $z = 0$ hålls konstant till 0 och temperaturen vid $z = 1$ hålls konstant till ϕ^4.

   Använd separation av variablerna för att bestämma jämviktstemperaturen i skalet. *Ledning: Den ena av de inblandade funktionerna uppfyller ett randvärdesproblem med periodiska randvillkor. Uppgiftsformuleringen från problem 2 kan komma till användning.* 20 *p*

4. Antag att $0 < \delta < \pi$ och låt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } |x| \le \delta, \\ 0 & \text{då } \delta < |x| \le \pi, \end{cases}$$

och $f(x + 2\pi) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

a) Beräkna Fourierkoefficienterna till f på $(-\pi, \pi)$. 5 p

b) Visa med hjälp av deluppgift a) att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

då $0 < \delta < \pi$. 5 p

c) Använd Parsevals formel för att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

5 p

d) Vad får du om $\delta = \pi/2$ i deluppgift c)? 5 p

5. a) Bestäm egenvärden och egenfunktioner till Sturm–Liouvilleproblemet

$$xX'' + \frac{1}{2}X' + \lambda X = 0,$$
$$X(0) = X'(1) = 0.$$

Ledning: $x = t^2$. 10 p

b) Formulera ortogonalitsegenskapen hos de ovanstående egenfunktionerna och kontrollera den direkt. 5 p

6. a) Representera funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{då } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{då } x \ge 1 \end{cases}$$

som en Fouriersinusintegral. 10 p

b) Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha - \sin(\alpha)}{\alpha^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha.$$

5 p

Skrivningsåterlämning hos Reine Elfsö i rum 208, hus 6. Om du mejlar mig på adressen `maad@math.su.se` *så meddelar jag resultatet och när tentorna är färdiga att hämtas.*