MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bögvad

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
030523

13 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Visa att kurvintegralen $\int_\gamma (3x^2y^2 + 2x)\,dx + (2x^3y + 2y)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^2$. Vad blir kurvintegralens värde om γ är någon kurva från punkten $(1,0)$ till punkten $(2,-1)$? 4 p

2. Beräkna
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$
där $S = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 = 9\}$, $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3 + z^4)$ och $\mathbf{N}$ betecknar den utåtriktade enhetsnormalen. 4 p

3. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y,z) = (z\cos y, -xz\sin y + 2x, x\cos y)$ och γ är skärningskurvan mellan ytan $x^2+y^2+z^2 = 4$ och planet $z = 1$, orienterad moturs uppifrån $z \geq 2$ sett. 4 p

4. Låt $\mathbf{u}(x,y,z) = (3x + \arctan(yz) - x^3, 3y - e^{xz} - y^3, 3z + \cos(xy) - z^3)$. Bestäm det största värdet ytintegralen $\iint\limits_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS$ kan anta, givet att det orienterade ytstycket Y är randen till en kompakt kropp i $\mathbf{R}^3$ och att $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen. 4 p

5. a) Avgör om följande generaliserade integral är konvergent.
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(\ln x + \cos x + x)}.$$
1 p

   b) Bestäm för vilka α, som serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos(1/n))^\alpha$$
är konvergent. 3 p

V.G.V.

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 6 p

7. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ då båda är konvergenta och divergenta samtidigt. 6 p

Skrivningsåterlämning tisdagen den 27 maj kl 12.30-13.00 utanför sal 14, därefter hos Ylva Brolin i rum 201 hus 6.