Lösningar till Matematisk analys 4, 010608

1. Fältet $(3x^2y^2 + 2x, 2x^3y + 2y)$ har som lätt ses via ansättning och integration potentialen $U(x, y) = x^3y^2 + x^2 + y^2$. Alltså är kurvintegralerna oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^2$. För en kurva från punkten $(1, 0)$ till punkten $(2, -1)$ blir kurvintegralens värde $U(2, -1) - U(1, 0) = 12$

2. Med Gauss sats är
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K div\mathbf{F}\, dxdydz$$
$$= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 9} (3x^2 + 3x^2 + 3z^2 + 4z^3)\, dx\, dy\, dz = 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 4} x^2 + x^2 + z^2\, dx\, dy\, dz,$$
ty integralerna av z^3 blir $= 0$, av symmetriskäl. Med rymdpolära koordinater så beräknas integralen till
$$3 \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} (\int_0^2 r^2 \cdot r^2 \sin\theta\, dr)\, d\theta)\, d\phi = 6\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^3 r^4\, dr = 12\pi \frac{3^5}{5}$$

3. Beräkna $\mathbf{rotF} = (0, 0, 2)$. Normalen till ytan Y på planet, med γ som rand är $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$, som uppenbarligen har enhetslängd. $\mathbf{rotF} \cdot N = 2$ Därför är med Stokes sats
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y 2\, dS,$$
d v s $6\pi = 2\pi(\sqrt{3})^2$ eller 2 gånger ytan av en cirkelskiva med radie $\sqrt{3}$(rita figur).

4. Låt K vara en kropp i rummet och låt $Y = \partial K$ (med $\mathbf{N}$ som utåtriktad enhetsnormal). Eftersom
$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x}(3x + \cos(yz) - x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3y - \cos(xz) - y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(3z + \cos(xy) - z^3)$$
$$= 3 - 3x^2 + 3 - 3y^2 + 3 - 3z^2$$
så ger divergenssatsen
$$\iint\limits_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint\limits_K \mathrm{div}(\mathbf{u})\, dxdydz = \iiint\limits_K 9 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$
Denna trippelintegral är maximal när K består av de punkter där integranden är ickenegativ, d.v.s. alla punkter (x, y, z) som uppfyller $9 - 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 0$ omm $9 \geq x^2 + y^2 + z^2$. Det maximala värdet uppnås alltså om K är klotet med radien $\sqrt{3}$ och centrum i origo. Med detta val av K får vi med hjälp av ett variabelbyte till rymdpolära koordinater
$$\iint\limits_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}\, dS = 3 \iiint\limits_K 3 - (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$
$$= 3 \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} (\int_0^{\sqrt{3}} (3 - r^2) r^2 \sin\theta\, dr) d\theta) d\varphi$$
$$= 3 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} (\int_0^{\sqrt{3}} (3 - r^2) r^2 \sin\theta\, dr) d\theta$$

$$= 6\pi(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta) \cdot (\int_0^{\sqrt{3}} (3 - r^2) r^2 \, dr)$$

$$= 6\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot (\int_0^{\sqrt{3}} 3r^2 - r^4 \, dr)$$

$$= 6\pi \cdot 2 \cdot \left[r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 12\pi(3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{5})$$

$$= \frac{72}{5}\sqrt{3}\pi,$$

vilket är det största värdet ytintegralen kan anta.

5. a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ konvergerar, så vi kan jämföra med denna :

$$lim \frac{x(\ln x + \cos x + x)}{x^2} = 1$$

vilket innebär enligt jämförelsekriteriet att också integralen i uppgiften konvergerar.

b)Intuitionen är att använda MacLaurinutveckling för att se att $(1 - \cos(1/n)) = (1/2)(1/n)^2 + O(1/n^4)$. Det betyder att serien bör förhålla sig som

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)^{2\alpha}.$$

Det kan vi göra precist genom att använda jämförelsekriteriet mellan positiva serier och

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \cos(1/n))}{(1/n)^{2\alpha}} = 1/2,$$

som följer ur MacLaurinutvecklingen. Antingen, refererande till läroboken eller användande sig av integralkriteriet, ser man att denna sista konvergerar precis när $2\alpha > 1$, eller $\alpha > 1/2$.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.