

Inga hjälpmedel tillåtna.

### Problemdel

1. a) Konvergerar eller divergerar den generaliserade integralen  $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^{4/3}} dx$ ? 3 p  
b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen  $y(x)$  till differentialekvationen  $(1 - x^2)y^{(3)} - 3xy'' - y' = 0$  med bivillkoren  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  och  $y''(0) = 2$ . Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 3 p
2. Beräkna trippelintegralen  $\iiint_D z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  där  $D$  är området  $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ . 4 p
3. Beräkna kurvintegralen  $\int_{\gamma} 5y^4 z dx + (x^3 + 10y^3 z^2) dy + (y^4 - y^5) dz$ , där  $\gamma$  är skärningskurvan mellan planet  $z = x + y$  och klotytan  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , och  $\gamma$ 's omloppsriktning är sådan att  $\gamma$ 's projektion på  $xy$ -planet har positiv omloppsriktning. 4 p
4. Beräkna ytintegralen  $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ , där  $Y$  är den del av ytan  $x^2 + y^2 = 1 + z^4$  där  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  och  $0 \leq z \leq 1$ , där  $\mathbf{N}$  är den enhetsnormal till  $Y$  som har negativ  $z$ -komponent, samt  $\mathbf{F} = (x(y + z^2), y(x + z^2), -z(x + y))$ . 4 p
5. Beräkna kurvintegralen 
$$\int_{\gamma} \frac{\sin y}{1 - \cos x \cos y} dx - \frac{\sin x}{1 - \cos x \cos y} dy$$
 där  $\gamma$  är parabeln  $y = 10 - 10x^2$  från punkten  $(-1, 0)$  till punkten  $(1, 0)$ . 4 p

### Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden i rummet med en under- och en översida, en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mera allmänna områden i rummet. 6 p
7. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt  $a_1, a_2, a_3, \dots$  vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning fredag 19 december kl 10.30-10.45 i sal 15 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.