Lösningar till Matematisk analys 4, 031218

1. a) Integranden till den givna generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx$$

är positiv överallt i $x > 0$. Integralen är generaliserad på två sätt, dels genom att integranden är odefinierad i nedre integrationsgränsen 0, och dels genom att övre integrationsgränsen är ∞. Vi studerar dessa båda generaliseringar var för sig genom att var för sig studera

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx \quad \text{och} \quad \int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx\,. \tag{1}$$

(Integrationsgränsen 1 i dessa båda integraler kan ersättas med vilket tal som helst > 0.)

Integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx:$

Eftersom $e^t = 1 + t + O(t^2)$ då t är nära 0 har vi att

$$\frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}} = \frac{1-\bigl(1-x+O(x^2)\bigr)}{x^{4/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} + O(x^{2/3}) \quad \text{då } x>0 \text{ och } x \text{ är nära } 0.$$

Det följer att

$$\frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}} \Big/ \frac{1}{x^{1/3}} = \Bigl(\frac{1}{x^{1/3}} + O(x^{2/3})\Bigr) \Big/ \frac{1}{x^{1/3}} = 1 + O(x) \to 1 \quad \text{då } x \to 0^+,$$

och eftersom

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$$

är konvergent (standardintegral), är också

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx$$

konvergent enligt jämförelsekriterium för integraler av positiva funktioner.

Integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx:$

Använder vi att $e^{-x} \to 0$ då $x \to \infty$ får vi att

$$\frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}} \Big/ \frac{1}{x^{4/3}} = 1 - e^{-x} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty,$$

och eftersom

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{4/3}}\,dx$$

är konvergent (standardintegral), är också

$$\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{4/3}}\,dx$$

konvergent enligt jämförelsekriterium för integraler av positiva funktioner.

Båda integralerna i (1) är således konvergenta och alltså är den givna geraliserade integralen konvergent.

b) Eftersom $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ och $y''(0) = 2$ kan den sökta potensserielösningen skrivas

$$y = x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = 2x + \sum_{k=3}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \ y'' = 2 + \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \text{ och att } y^{(3)} = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}.$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$(1-x^2)\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} - 3x\big(2 + \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}\big) - \big(2x + \sum_{k=3}^{\infty} k a_k x^{k-1}\big) = 0,$$

dvs vi har att

$$\begin{aligned} &-8x + \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} \\ &\qquad - \big(x^2 \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + 3x \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=3}^{\infty} k a_k x^{k-1}\big) = 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned} x^2 &\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + 3x \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=3}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-1} + \sum_{k=3}^{\infty} 3k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=3}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \big(k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k\big)a_k x^{k-1} = \sum_{k=3}^{\infty} k^3 a_k x^{k-1} \end{aligned}$$

och

$$\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} = \sum_{\ell=1}^{\infty}}_{\text{Sätt } \ell = k-2} \underbrace{(\ell+2)(\ell+1)\ell a_{\ell+2} x^{\ell} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} (k+2)(k+1)k a_{k+2} x^{k-1} =$$

$$= 6a_3 + 24a_4 x + \sum_{k=3}^{\infty} (k+2)(k+1)k a_{k+2} x^{k-1}$$

Sambandet (2) kan därför skrivas

$$6a_3 + (24a_4 - 8)x + \sum_{k=3}^{\infty} \big((k+2)(k+1)k a_{k+2} - k^3 a_k\big)x^{k-1} = 0$$

Vi får således att

$$(k+2)(k+1)k a_{k+2} - k^3 a_k = 0, \ \ k = 3, 4, \ldots$$

samt att

$$6a_3 = 24a_4 - 8 = 0,$$

och det följer att

$$a_{k+2} = \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad k = 3, 4, \dots \tag{3}$$

samt att

$$a_3 = 0, \ a_4 = \frac{1}{3}.$$

Av $a_3 = 0$ och (3) följer att

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0,$$

dvs att

$$a_{2k+1} = 0 \text{ för } k = 1, 2, \dots .$$

Av $a_4 = \frac{1}{3}$ och (3) följer att

$$\begin{aligned}
a_6 &= \frac{4^2}{5 \cdot 6} a_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2}{5 \cdot 6}, \\
a_8 &= \frac{6^2}{7 \cdot 8} a_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2 \cdot 6^2}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}, \\
a_{10} &= \frac{8^2}{9 \cdot 10} a_8 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}, \\
&\ \vdots,
\end{aligned}$$

dvs att

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2}{5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} = 2 \cdot \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} = \\
&= 2 \cdot \frac{(2 \cdot 1)^2 \cdot (2 \cdot 2)^2 \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot \ldots \cdot (2(k-1))^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} = 2^{2k-1} \cdot \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1))^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} = \\
&= 2^{2k-1} \frac{\big((k-1)!\big)^2}{(2k)!} \text{ för } k = 3, 4, \dots .
\end{aligned}$$

Vi noterar vidare att slutformeln ovan för a_{2k} även stämmer då $k = 2$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y = x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{2k-1} \frac{\big((k-1)!\big)^2}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k-1} \frac{\big((k-1)!\big)^2}{(2k)!} x^{2k}. \tag{4}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = 2^{2k-1} \frac{\big((k-1)!\big)^2}{(2k)!} x^{2k}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\begin{aligned}
\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} &= 2^{2(k+1)-1} \frac{\big((k+1-1)!\big)^2}{\big(2(k+1)\big)!} |x|^{2(k+1)} \frac{1}{2^{2k-1}} \frac{(2k)!}{\big((k-1)!\big)^2} \frac{1}{|x|^{2k}} = \\
&= 2^{2k+1} \frac{(k!)^2}{(2k+2)!} |x|^{2k+2} \frac{1}{2^{2k-1}} \frac{(2k)!}{\big((k-1)!\big)^2} \frac{1}{|x|^{2k}} = \\
&= \frac{2k^2}{(2k+1)(k+1)} |x|^2 = \frac{1}{\Big(1 + \frac{1}{2k}\Big)\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)} |x|^2 \to |x|^2 \text{ då } k \to \infty,
\end{aligned}$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (4) är absolutkonvergent om $|x|^2 < 1$ och divergent om $|x|^2 > 1$. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| > 1$, och följdaktligen är potensserielösningens konvergensradie 1 (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen i intervallet $-1 < x < 1$).

Anmärkning. Derivering av
$$y = (\arcsin x)^2$$
ger att
$$y' = 2(\arcsin x)(1-x^2)^{-1/2},$$
varav fås att
$$(1-x^2)^{1/2} y' = 2(\arcsin x),$$
och derivering av detta ger att
$$(1-x^2)^{1/2} y'' - x(1-x^2)^{-1/2} y' = 2(1-x^2)^{-1/2},$$
varav fås att
$$(1-x^2)y'' - xy' = 2,$$
och derivering av detta ger att
$$(1-x^2)y^{(3)} - 3xy'' - y' = 0. \tag{5}$$
Sambanden ovan ger också lätt att $y = (\arcsin x)^2$ även uppfyller att $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ och $y''(0) = 2$, och eftersom villkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ och $y''(0) = 2$ tillsammans med (5) bestämmer y entydigt, så följer av lösningen av 1b) ovan att
$$(\arcsin x)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k-1} \frac{\big((k-1)!\big)^2}{(2k)!} x^{2k}$$
då $-1 < x < 1$, en potensserieutveckling som inte är lätt att få på något annat sätt än det här angivna. (Huruvida denna potensserieutveckling gäller även då $x = \pm 1$, eller ej, framgår inte av gjorda räkningar, men man kan visa att utvecklingen gäller även då $x = \pm 1$.)

2. Ytan $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ är en rät cirkulär konyta med spetsen i origo och med positiva z-axeln som symmetriaxel. Sätter vi $y = 0$ i $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ får vi $z = \sqrt{3}|x|$, som för $x \geq 0$ är linjen $z = \sqrt{3}x$ i xz-planet, en linje som har lutning $\sqrt{3}$ och således lutningsvinkel $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Konytans halva toppvinkel är alltså $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ är en klotyta med medelpunkt i origo och radie 2. I rymdpolära koordinater r, θ och φ ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$) är D således området $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Med hjälp av rymdpolära koordinater får vi därför att
$$\iiint_D z^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6 \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} r^2 \cos^2\theta \; r \; r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi =$$
$$= \int_0^2 r^5\, dr \int_0^{\pi/6} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{1}{6}r^6\right]_0^2 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/6} 2\pi = \frac{8\pi}{9}(8 - 3\sqrt{3}).$$

3. Vi beräknar kurvintegralen genom att använda Stokes sats. Sambandet $z = x+y$ ger insatt i sambandet $x^2+y^2+z^2 = 4$ att $x^2+y^2+x^2+2xy+y^2 = 4$, dvs att $x^2+xy+y^2 = 2$. Kurvan γ består alltså av alla (x,y,z) sådana att $x^2+xy+y^2 = 2$ och $z = x+y$. Låt Y beteckna den del av planet $z = x+y$ där $x^2+xy+y^2 \leq 2$. En parametrisering av Y är $x = u$, $y = v$, $z = u+x$, $u^2+uv+v^2 \leq 2$. Med $\mathbf{r}(u,v) = (u,v,u+v)$ får vi att $\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,1)$, $\mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,1)$ och $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (-1,-1,1)$,

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_\gamma 5y^4 z\,dx + (x^3 + 10y^3 z^2)\,dy + (y^4 - y^5)\,dz =$$

(enligt Stokes sats)

$$= \iint_Y \big(\nabla \times (5y^4 z, x^3 + 10y^3 z^2, y^4 - y^5)\big) \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_Y (4y^3 - 5y^4 - 20y^3 z, 5y^4, 3x^2 - 20y^3 z) \cdot \mathbf{N}\,dS =$$

(enligt den införda parametriseringen av Y)

$$= + \iint_{u^2+uv+v^2 \le 2} \big(4v^3 - 5v^4 - 20v^3(u+v), 5v^4, 3u^2 - 20v^3(u+v)\big) \cdot (-1,-1,1)\,dudv =$$

$$= \iint_{u^2+uv+v^2 \le 2} (3u^2 - 4v^3)\,dudv =$$

(Notera att $u^2 + uv + v^2 \le 2 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \le 2$ och gör därför substitutionen $s = u + \frac{1}{2}v$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}v \Leftrightarrow u = s - \frac{1}{\sqrt{3}}t$, $v = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \le 2} \left(3\Big(s - \frac{1}{\sqrt{3}}t\Big)^2 - 4\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}t\Big)^3\right) \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| dsdt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le 2} \left(3s^2 + t^2 - 2\sqrt{3}st - \frac{32}{3\sqrt{3}}t^3\right) dsdt =$$

(eftersom $-2\sqrt{3}st - \frac{32}{3\sqrt{3}}t^3$ är udda i t och området $s^2 + t^2 \le 2$ är symmetriskt kring $t = 0$)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le 2} (3s^2 + t^2)\,dsdt =$$

(eftersom området $s^2 + t^2 \le 2$ är symmetriskt i s och t)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le 2} \left(3\frac{1}{2}(s^2 + t^2) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2)\right) dsdt = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le 2} (s^2 + t^2)\,dsdt =$$

(inför polära koordinater $s = r\cos\theta,\ t = r\sin\theta$)

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta < 2\pi}} r^2 r\,drd\theta = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}.$$

4. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara ytan $x = 0$, $y^2 \le 1 + z^4$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 1$, låt Y_2 vara ytan $y = 0$, $x^2 \le 1 + z^4$, $x \ge 0$, $0 \le z \le 1$, låt Y_3 vara ytan $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, och låt Y_4 vara ytan $z = 1$, $x^2 + y^2 \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_k$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_k, $k = 1, 2, 3, 4$, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Vi noterar vidare att $\mathbf{N}$, den enhetsnormal till Y som har negativ z-komponent, också är utåtriktad i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller därför att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS + \sum_{k=1}^{4} \iint_{Y_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_k\,dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz. \tag{6}$$

På Y_1 är $x = 0$ och $\mathbf{N}_1 = (-1, 0, 0)$, och alltså är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = (0, yz^2, -yz) \cdot (-1, 0, 0) = 0$ på hela Y_1. På Y_2 är $y = 0$ och $\mathbf{N}_2 = (0, -1, 0)$, och alltså är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 = (xz^2, 0, -xz) \cdot (0, -1, 0) = 0$ på hela Y_2. På Y_3 är $z = 0$ och $\mathbf{N}_3 = (0, 0, -1)$, och alltså är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_3 = (xy, xy, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ på hela Y_3. Det följer att

$$\iint_{Y_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_k \, dS = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{7}$$

En parametrisering av Y_4 är $x = u$, $y = v$, $z = 1$, $u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Med $\mathbf{r} = (u, v, 1)$ får vi att $\mathbf{r}_1' = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}_2' = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2' = (0, 0, 1)$. Eftersom ytnormalen $\mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2'$ till Y_4 pekar uppåt i den införda parametriseringen, och alltså är utåtriktad i förhållande till D, får vi att

$$\iint_{Y_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_4 \, dS = \iint_{Y_4} \big(x(y + z^2), y(x + z^2), -z(x + y)\big) \cdot \mathbf{N}_4 \, dS =$$

$$= + \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 2 \\ u \geq 0, v \geq 0}} \big(u(v + 1), v(u + 1), -(u + v)\big) \cdot (0, 0, 1) \, dudv = - \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 2 \\ u \geq 0, v \geq 0}} (u + v) \, dudv =$$

(inför polära koordinater, $u = r \cos\theta$, $v = r \sin\theta$)

$$= - \iint_{\substack{0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta < \pi/2}} (r \cos\theta + r \sin\theta) r \, drd\theta = - \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta) \, d\theta =$$

$$= - \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^{\sqrt{2}} \left[\sin\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}. \tag{8}$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = y + z^2 + x + z^2 - (x + y) = 2z^2$ och D är mängden $x^2 + y^2 \leq 1 + z^4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$, och alltså är

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_D 2z^2 \, dxdydz = 2 \int_0^1 z^2 \left(\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1+z^4 \\ x \geq 0, y \geq 0}} dxdy \right) dz =$$

(eftersom $\displaystyle\iint_A dxdy = \text{area}(A)$)

$$= 2 \int_0^1 z^2 \, \frac{1}{4} \pi (1 + z^4) \, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (z^2 + z^6) \, dz = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{7} z^7\right]_0^1 = \frac{5\pi}{21}. \tag{9}$$

Insättning av (7), (8) och (9) i (6) ger att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{5\pi}{21} = \frac{28\sqrt{2} + 5\pi}{21}.$$

Anmärkning. Den givna ytintegralen kan även beräknas genom att införa en parametrisering av ytan Y och använda definitionen av ytintegral. En parametrisering av ytan Y kan fås genom att notera att Y kan skrivas $z = (x^2 + y^2 - 1)^{1/4}$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ytan Y kan således ges parametriseringen $(x, y, z) = \big(u, v, (u^2 + v^2 - 1)^{1/4}\big)$, $1 \leq u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Används denna parametrisering för att beräkna den givna ytintegralen fås besvärligare räkningar än de som behövdes ovan, men räkningarna är fullt möjliga att genomföra.

5. Sätt

$$P(x,y) = \frac{\sin y}{1-\cos x\cos y} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{\sin x}{1-\cos x\cos y}.$$

Låt D vara hela planet utom de punkter (x,y) där $\cos x\cos y = 1$. Funktionerna P och Q och alla deras derivator existerar och är kontinuerliga i D. Derivering ger att

$$P_2'(x,y) = Q_1'(x,y) = \frac{\cos y - \cos x}{(1-\cos x\cos y)^2} \quad \text{då } (x,y) \in D.$$

Vi utnyttjar detta faktum och Greens formel för att byta ut den givna integrationsvägen mot en ny väg längs vilken den givna kurvintegralen är enklare att beräkna. Eftersom $-1 \le \cos u \le 1$ för alla reella tal u gäller att $\cos x\cos y = 1$ endast då $\cos x = \cos y = 1$ och då $\cos x = \cos y = -1$. Men $\cos u = 1$ $\Leftrightarrow$ $u = 2m\pi$ där m heltal, och $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = (2m-1)\pi$ där m heltal. Området D är således hela planet utom de båda punktmängderna $\{(2m\pi, 2n\pi) | m,n \in \mathbf{Z}\}$ och $\{\big((2m-1)\pi, (2n-1)\pi\big) | m,n \in \mathbf{Z}\}$. Låt γ_1 vara räta linjen från punkten $(-1,0)$ till punkten $\big(-\frac{\pi}{2}, 0\big)$, låt γ_2 vara räta linjen från punkten $\big(-\frac{\pi}{2}, 0\big)$ till punkten $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\big)$, låt γ_3 vara räta linjen från punkten $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\big)$ till punkten $\big(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\big)$, låt γ_4 vara räta linjen från punkten $\big(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\big)\big)$ till punkten $\big(\frac{\pi}{2}, 0\big)\big)$, och låt γ_5 vara räta linjen från punkten $\big(\frac{\pi}{2}, 0\big)\big)$ till punkten $(1,0)$. Kurvan $\gamma \cup (-\gamma_1) \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3) \cup (-\gamma_4) \cup (-\gamma_5)$ är då en enkel sluten kurva genomlupen i positiv led. Låt Γ var denna slutna kurva och låt E vara det område i planet som Γ omsluter. Då gäller att $E \cup \Gamma \subset D$ (rita figur). Vi kan alltså tillämpa Greens formel på funktionerna P och Q i området $E \cup \Gamma$ och få att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \sum_{k=1}^{5} \int_{-\gamma_k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_E \big(Q_1'(x,y) - P_2'(x,y)\big)\,dxdy,$$

och eftersom $\int_{-\sigma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_\sigma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ för varje kurva σ samt $P_2'(x,y) = Q_1'(x,y)$ i D så följer att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{5} \int_{\gamma_k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{10}$$

Samtliga kurvintegraler i högra ledet av (10) är enkla att beräkna. På γ_1 och γ_5 är y konstant lika med noll och eftersom $P(x,0) = 0$ ger det att

$$\int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\gamma_5} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{11}$$

En parametrisering av γ_2 är $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = t$, $0 \le t \le \frac{7\pi}{2}$ och den ger att

$$\int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \left(0 - \frac{\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)}{1-\cos\big(-\frac{\pi}{2}\big)\cos t}\right) dt = \int_0^{\frac{7\pi}{2}} dt = \frac{7\pi}{2}. \tag{12}$$

En parametrisering av γ_3 är $x = t$, $y = \frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ och den ger att

$$\int_{\gamma_3} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\frac{7\pi}{2}}{1-\cos t\cos\frac{7\pi}{2}} - 0\right) dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = -\pi. \tag{13}$$

En parametrisering av $-\gamma_4$ är $x = \frac{\pi}{2}$, $y = t$, $0 \le t \le \frac{7\pi}{2}$ och den ger att

$$\int_{\gamma_4} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{-\gamma_4} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= -\int_0^{\frac{7\pi}{2}} \left(0 - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}\cos t}\right) dt = \int_0^{\frac{7\pi}{2}} dt = \frac{7\pi}{2}. \tag{14}$$

Av (10), (11), (12), (13) och (14) följer att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 + \frac{7\pi}{2} - \pi + \frac{7\pi}{2} + 0 = 6\pi.$$

Anmärkning. Sambandet (10) kan också motiveras på följande alternativa sätt. Området D är en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet, men D är inte enkelt sammanhängande. Trots att $P_2' = Q_1'$ i D behöver alltså inte $\int_\sigma P\,dx + Q\,dy$ vara oberoende av vägen för kurvor σ i D, och i denna uppift är inte heller $\int_\sigma P\,dx + Q\,dy$ oberoende av vägen för kurvor σ i D kan man visa. Ett argument med oberoende av vägen kan dock ändå användas för att motivera att (10) gäller, t ex på följande sätt. Att $P_2' = Q_1'$ i D medför givetvis att $P_2' = Q_1'$ i F om F är ett delområde av D, så därför har vi följande.

$$\begin{gathered}\text{För varje enkelt sammanhängande delområde } F \text{ av } D \text{ är} \\ \textstyle\int_\sigma P\,dx + Q\,dy \text{ oberoende av vägen för kurvor } \sigma \text{ i } F.\end{gathered} \tag{15}$$

Från detta kan sedan (10) fås, t ex såhär. Låt F vara öppna rektangeln $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < 4\pi$ utom punkterna $(0,y)$ där $-\pi < y \leq 2\pi$. Då är F en enkelt sammanhängande delmängd av D, och F innehåller kurvorna γ och $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$ (rita figur). Eftersom γ och $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$ har samma start- och slutpunkt så följer därför av (15) att (10) gäller.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.