MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
040115

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Bestäm de reella tal x för vilka serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k+1} x^k$$
konvergerar. Bestäm också seriens summa för dessa tal x. 3 p

   b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y'' + xy' + 3y = 0$ med bivillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 3 p

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (4x^3 - 3y^5)\,dx + (3x^5 + 10x^3y^2 - 2y)\,dy$ där γ är kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ från punkten $(2, 0)$ till punkten $(0, 2)$. 4 p

3. Låt Y vara den del av ytan $x^2 + y^2 = 1$ där $z \geq 0$ och $z \leq 2 + x$, och låt $\mathbf{N}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$ om $\mathbf{F} = (x^2 + z^2, y^4, 0)$. Beräkna också ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$ om istället $\mathbf{F} = (x^2 + z^2, y^4, z^6)$. 4 p

4. Bestäm arean av den del av halvklotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ som är innanför den cirkulära cylinderytan $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Bestäm också arean av den del av klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som är utanför de båda cirkulära cylinderytorna $(x-1)^2 + y^2 = 1$ och $(x+1)^2 + y^2 = 1$. 4 p

5. Låt D vara mängden av alla $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ sådana att $x^2 + y^2z^2 \neq 0$. Betrakta vektorfältet
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x^2 + y^2z^2}, -\frac{xz}{x^2 + y^2z^2}, -\frac{xy}{x^2 + y^2z^2}\right),$$
definierat då $(x, y, z) \in D$. Visa att rotationen av $\mathbf{F}$ är 0 i hela D. Beräkna också kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är skärningskurvan mellan ytan $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ och planet $z = 1 + x$, och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. 4 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en öppen bågvis sammanhängande delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 6 p

7. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av tal sådana att

   (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$

   (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

   Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ är konvergent och att seriens summa s uppfyller att $0 \leq s \leq a_1$. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning fredag 16 januari kl 12.45-13.00 i rum 328 hus 6, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.