Lösningar till Matematisk analys 4, 040115

1. a) Sätt

$$a_k = \frac{k^2}{k+1} x^k = \frac{k^2 x^k}{k+1}$$

För $x \neq 0$ har vi då att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)^2 |x|^{k+1}}{k+2} \frac{k+1}{k^2 |x|^k} = \frac{(k+1)^3}{k^2(k+2)} |x| = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}{1+\frac{2}{k}} |x| \to |x| \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att givna potensserien är absolutkonvergent och därmed konvergent om $|x| < 1$ samt att serien är divergent om $|x| > 1$. Givna potensserien är självklart konvergent om $x = 0$ eftersom seriens alla termer då är 0. Vidare har vi att

$$|x| = 1 \implies |a_k| = \frac{k^2}{k+1} \implies a_k \not\to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{är divergent.}$$

Givna potensserien är således konvergent precis om $|x| < 1$. De reella tal x som ger konvergens är alltså $-1 < x < 1$. Vi bestämmer nu seriens summa för dessa reella tal. Summan kan fås genom att starta med likheten (summaformeln för en oändlig geometrisk serie)

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Integrerar vi båda led och utnyttjar att potensserier kan integreras termvis i det inre av det intervall av reella tal där potensserien är konvergent, får vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k \, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt, \quad -1 < x < 1,$$

dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

Om $x \neq 0$ kan vi dividera med x och få att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k = -\frac{1}{x} \ln(1-x), \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Deriverar vi båda led och utnyttjar att potensserier kan deriveras termvis i det inre av det intervall av reella tal där potensserien är konvergent, får vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^{k-1} = \frac{1}{x^2} \ln(1-x) + \frac{1}{x} \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Multiplikation av båda led med x ger att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k = \frac{1}{x} \ln(1-x) + \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Deriverar vi därefter båda led och utnyttjar igen att potensserier kan deriveras termvis i det inre av det intervall av reella tal där potensserien är konvergent, får vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k+1} x^{k-1} = -\frac{1}{x^2} \ln(1-x) - \frac{1}{x}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Multiplicera sedan båda led med x. Vänsterledet övergår då i den givna potensserien och vi får för denna potensserie att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k+1} x^{k} = -\frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Om $x = 0$ är den givna potensseriens summa 0. Den givna potensserien är därmed summerad för alla reella tal x i $-1 < x < 1$.

b) Eftersom $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ kan den sökta potensserielösningen skrivas

$$y = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \text{ och att } y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x\big(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1}\big) + 3\big(x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k\big) = 0,$$

dvs vi har att

$$4x + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x\sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 3\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 0. \tag{1}$$

Men

$$x\sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 3\sum_{k=2}^{\infty} a_k x =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} 3 a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} (k+3) a_k x^k$$

och

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} =}_{\text{Sätt } \ell = k-2} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1) a_{\ell+2} x^{\ell} =}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k =$$

$$= 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$2a_2 + (6a_3 + 4)x + \sum_{k=2}^{\infty} \big((k+2)(k+1) a_{k+2} + (k+3) a_k\big) x^k = 0$$

Vi får således att

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(k+3)a_k=0, \quad k=2,3,\ldots$$

samt att

$$a_2=6a_3+4=0,$$

och det följer att

$$a_{k+2}=-\frac{k+3}{(k+1)(k+2)}a_k, \quad k=2,3,\ldots \tag{2}$$

samt att

$$a_2=0, \ a_3=-\frac{2}{3}.$$

Av $a_2=0$ och (2) följer att

$$a_2=a_4=a_6=\ldots=0,$$

dvs att

$$a_{2k}=0 \text{ för } k=1,2,\ldots\ .$$

Av $a_3=-\frac{2}{3}$ och (2) följer att

$$\begin{aligned}
a_5&=-\frac{6}{4\cdot 5}a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4\cdot 5}\,,\\
a_7&=-\frac{8}{6\cdot 7}a_5=-\frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\,,\\
a_9&=-\frac{10}{8\cdot 9}a_7=\frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\,,\\
&\vdots,
\end{aligned}$$

dvs att

$$\begin{aligned}
a_{2k-1}&=(-1)^{k-1}\frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2k}{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}=\\
&=(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2k}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k-1)}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{2^k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k-1)}=\\
&=\ (-1)^{k-1}2^{k-1}\frac{k!}{(2k-1)!} \text{ för } k=3,4,\ldots\ .
\end{aligned}$$

Vi noterar vidare att slutformeln ovan för a_{2k-1} även stämmer då $k=2$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y=x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}\frac{k!}{(2k-1)!}x^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}\frac{k!}{(2k-1)!}x^{2k-1}. \tag{3}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k=(-1)^{k-1}2^{k-1}\frac{k!}{(2k-1)!}x^{2k-1}, \quad k=1,2,\ldots.$$

Då gäller för $x\neq 0$ att

$$\begin{aligned}
\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}&=2^{(k+1)-1}\frac{(k+1)!}{\big(2(k+1)-1\big)!}|x|^{2(k+1)-1}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{(2k-1)!}{k!}\frac{1}{|x|^{2k-1}}=\\
&=2^k\frac{(k+1)!}{(2k+1)!}|x|^{2k+1}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{(2k-1)!}{k!}\frac{1}{|x|^{2k-1}}=\\
&=\frac{k+1}{k(2k+1)}|x|^2=\frac{1}{k}\frac{1+\frac{1}{k}}{2+\frac{1}{k}}|x|^2\to 0 \text{ då } k\to\infty \text{ för alla } x,
\end{aligned}$$

och det följer av d'Alemberts kvotkriterium att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningens konvergensradie är alltså ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna differentialekvationen för alla $x \in \mathbf{R}$).

2. Sätt

$$P(x, y) = 4x^3 - 3y^5 \quad \text{och} \quad Q(x, y) = 3x^5 + 10x^3y^2 - 2y.$$

Vi beräknar den givna kurvintegralen genom att först på lämpligt sätt komplettera kurvan γ till en sluten kurva och sedan använda Greens formel. Låt γ_1 vara y-axeln från punkten $(0, 0)$ till punkten $(0, 2)$, låt γ_2 vara x-axeln från punkten $(0, 0)$ till punkten $(2, 0)$ och låt D vara området $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Då är $\gamma \cup (-\gamma_1) \cup \gamma_2$ en enkel sluten kurva med positiv omloppsriktning, och D är kurvans inre. Enligt Greens formel gäller därför att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men

$$\int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

och

$$Q_1' - P_2' = 15x^4 + 30x^2y^2 - (-15y^4) = 15(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 15(x^2 + y^2)^2,$$

och det följer att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + 15\iint_D (x^2 + y^2)^2\,dxdy. \tag{4}$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $0 \leq t \leq 2$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 (-2t)\,dt = \big[-t^2\big]_0^2 = -4. \tag{5}$$

En parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = 0$, $0 \leq t \leq 2$, och den ger att

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 4t^3\,dt = \big[t^4\big]_0^2 = 16. \tag{6}$$

Vidare har vi att

$$\iint_D (x^2 + y^2)^2\,dxdy =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} (r^2)^2 r\,drd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^2 r^5\,dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{6}r^6\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3} \tag{7}$$

Insättnig av (5), (6) och (7) i (4) ger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 80\pi - 20.$$

3. Vi börjar med fallet $\mathbf{F} = (x^2 + z^2, y^4, 0)$ och använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom den givna ytan Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Planet $z = 2 + x$ skär xy-planet (planet $z = 0$) längs linjen $x = -2$ i xy-planet, och $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$. Hela den del av planet $z = 2+x$ som är innanför cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ ligger därför ovanför planet $z = 0$. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 2+x$ som är innanför cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 0$ som är innanför cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_k$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_k, $k = 1, 2$, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Även $\mathbf{N}$, den angivna enhetsnormalen till den givna ytan Y, är utåtriktad i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller därför att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz. \tag{8}$$

En parametrisering av Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = 2 + u$, $u^2 + v^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r} = (u, v, 2 + u)$ får vi att $\mathbf{r}'_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{r}'_2 = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2 = (-1, 0, 1)$. Eftersom ytnormalen $\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen, och alltså är utåtriktad i förhållande till D, får vi att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} (x^2 + z^2, y^4, 0) \cdot \mathbf{N}_1\, dS =$$

$$= + \iint_{u^2+v^2\leq 1} \big(u^2 + (2 + u)^2, v^4, 0\big) \cdot (-1, 0, 1)\, dudv =$$

$$= - \iint_{u^2+v^2\leq 1} \big(u^2 + (2 + u)^2\big)\, dudv = - \iint_{u^2+v^2\leq 1} (2u^2 + 4u + 4)\, dudv =$$

(eftersom $4u$ är udda i u och området $u^2 + v^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $u = 0$)

$$= - \iint_{u^2+v^2\leq 1} (2u^2 + 4)\, dudv =$$

(eftersom området $u^2 + v^2 \leq 1$ är symmetriskt i u och v)

$$= - \iint_{u^2+v^2\leq 1} \Big(2 \cdot \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + 4\Big)\, dudv = - \iint_{u^2+v^2\leq 1} (u^2 + v^2 + 4)\, dudv =$$

(inför polära koordinater $u = \rho \cos\theta$, $v = \rho \sin\theta$)

$$= - \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} (\rho^2 + 4)\rho\, d\rho d\theta = - \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} (\rho^3 + 4\rho)\, d\rho d\theta =$$

$$= -2\pi \int_0^1 (\rho^3 + 4\rho)\, d\rho = -2\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho^2\right]_0^1 = -\frac{9\pi}{2}. \tag{9}$$

På Y_2 är $z = 0$ och $\mathbf{N}_2 = (0, 0, -1)$, och alltså är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 = (x^2, y^4, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ på hela Y_2. Det följer att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = 0. \tag{10}$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 4y^3$ och D är mängden $0 \leq z \leq 2 + x$, $x^2 + y^2 \leq 1$, och alltså är

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_D (2x + 4y^3)\, dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^{2+x} (2x + 4y^3)\, dz\right) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \Big[2xz + 4y^3 z\Big]_{z=0}^{z=2+x} dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \big(2x(2 + x) + 4y^3(2 + x)\big)\, dxdy =$$

(eftersom $4y^3(2+x)$ är udda i y och området $x^2+y^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $y=0$)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2x(2+x)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (4x+2x^2)\,dxdy =$$

(eftersom $4x$ är udda i x och området $x^2+y^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $x=0$)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2x^2\,dxdy =$$

(eftersom området $x^2+y^2 \leq 1$ är symmetriskt i x och y)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,dxdy =$$

(inför polära koordinater $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$)

$$= \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} \rho^2\,\rho\,d\rho d\theta = \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} \rho^3\,d\rho d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho^3\,d\rho = 2\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

Insättning av (9), (10) och (11) i (8) ger att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 5\pi.$$

Det återstår att beräkna den givna ytintegralen i fallet $\mathbf{F}=(x^2+z^2,y^4,z^6)$. Eftersom ytan Y är en del av den lodräta ytan $x^2+y^2=1$ så är enhetsnormalen $\mathbf{N}$ till Y en vektor av typen $\mathbf{N}=(\ldots,\ldots,0)$ i varje punkt på ytan Y, och alltså är $(x^2+z^2,y^4,z^6)\cdot\mathbf{N}=(x^2+z^2,y^4,0)\cdot\mathbf{N}$ överallt på Y. Den givna ytintegralen har således samma värde i detta fall som i fallet ovan.

4. Låt A_1 vara arean av den del av halvklotytan $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$ som är innanför den cirkulära cylinderytan $(x-1)^2+y^2=1$, låt A_2 vara arean av den del av klotytan $x^2+y^2+z^2=4$ som är utanför de båda cirkulära cylinderytorna $(x-1)^2+y^2=1$ och $(x+1)^2+y^2=1$, och låt A_3 vara arean av hela klotytan $x^2+y^2+z^2=4$. På grund av symmetri gäller då att $A_2=A_3-4A_1$. Vidare är $A_3=4\pi\,2^2=16\pi$, eftersom ett klot med radie a har arean $4\pi a^2$. Om A_1 är beräknad får vi alltså lätt även A_2.

Vi beräknar nu A_1. Vi har att $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0 \Leftrightarrow z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Sambandet $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ger

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

och

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Enligt formel för area av funktionsyta gäller därför att

$$A_1 = 2\iint_{(x-1)^2+y^2\leq 1}\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy. \tag{12}$$

Vi inför nu polära koordinater. Notera att $(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=2x$, som med $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ger $r^2=2r\cos\theta$, varav fås $r=2\cos\theta$. I xy-planet är $(x-1)^2+y^2=1$ en cirkel med medelpunkt i $(1,0)$ och radie 1. Cirkeln tangerar y-axeln i origo. Cirkelskivan $(x-1)^2+y^2\leq 1$ i polära koordinater är således området $0 \le r \le 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (rita figur). Övergång till polära koordinater i (12) ger alltså att

$$A_1 = 2 \iint_{\substack{0 \le r \le 2\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr d\theta = 2 \iint_{\substack{0 \le r \le 2\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}}} r(4-r^2)^{-1/2}\, dr d\theta,$$

och fortsatt räkning ger sedan att

$$A_1 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r(4-r^2)^{-1/2}\, dr \right) d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\Big[-(4-r^2)^{1/2} \Big]_{r=0}^{r=2\cos\theta} \right) d\theta =$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - (1-\cos^2\theta)^{1/2}\big)\, d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - (\sin^2\theta)^{1/2}\big)\, d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - |\sin\theta|\big)\, d\theta =$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \sin\theta\big)\, d\theta = 8\Big[\theta + \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi - 8.$$

För den andra sökta arean får vi enligt inledningen av lösningen till denna uppgift att

$$A_2 = A_3 - 4A_1 = 16\pi - 4(4\pi - 8) = 32.$$

(Notera att värdet för A_2 ej innehåller π.)

5. Sätt

$$P(x,y,z) = \frac{yz}{x^2 + y^2 z^2}, \quad Q(x,y,z) = -\frac{xz}{x^2 + y^2 z^2}, \quad \text{och} \quad R(x,y,z) = -\frac{xy}{x^2 + y^2 z^2}$$

för alla $(x,y,z) \in D$. Då är $F = (P,Q,R)$ och eftersom rotationen av $\mathbf{F}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_1, D_2, D_3) \times (P,Q,R) = \big(R_2' - Q_3', -(R_1' - P_3'), Q_1' - P_2'\big),$$

och vidare

$$R_2' - Q_3' = -\frac{x(x^2+y^2z^2) - xy \cdot 2yz^2}{(x^2+y^2z^2)^2} - \Big(-\frac{x(x^2+y^2z^2) - xz \cdot 2y^2 z}{(x^2+y^2z^2)^2} \Big) =$$

$$= -\frac{x^3 - xy^2z^2)}{(x^2+y^2z^2)^2} + \frac{x^3 - xy^2z^2)}{(x^2+y^2z^2)^2} = 0,$$

$$R_1' - P_3' = -\frac{y(x^2+y^2z^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2z^2)^2} - \frac{y(x^2+y^2z^2) - yz \cdot 2y^2 z}{(x^2+y^2z^2)^2} =$$

$$= -\frac{y^3z^2 - x^2y}{(x^2+y^2z^2)^2} - \frac{x^2y - y^3z^2}{(x^2+y^2z^2)^2} = 0,$$

$$Q_1' - P_2' = -\frac{z(x^2+y^2z^2) - xz \cdot 2x}{(x^2+y^2z^2)^2} - \frac{z(x^2+y^2z^2) - yz \cdot 2yz^2}{(x^2+y^2z^2)^2} =$$

$$= -\frac{y^2z^3 - x^2z}{(x^2+y^2z^2)^2} - \frac{x^2z - y^2z^3}{(x^2+y^2z^2)^2} = 0,$$

för alla $(x,y,z) \in D$, så följer att

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \text{ i hela } D. \tag{13}$$

Vi beräknar nu den givna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$, och vi gör det genom att med hjälp av (13) och Stokes sats byta ut den givna integrationsvägen γ mot en ny väg längs vilken kurvintegralen är enklare att beräkna. Först reder vi dock ut lite närmare vilket område D är. Vi har att $x^2 + y^2 z^2 = 0$ endast då $x = z = 0$ och då $x = y = 0$, dvs $x^2 + y^2 z^2 = 0$ endast på y-axeln och z-axeln.

$$\text{Området } D \text{ är således hela } xyz\text{-rummet utom } y\text{-axeln och } z\text{-axeln.} \tag{14}$$

Vi undersöker också lite närmare vilken väg γ är. Sambandet $z = 1 + x$ insatt i sambandet $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ ger att $2x^2 + y^2 = 1 + 1 + 2x + x^2$, dvs att $(x-1)^2 + y^2 = 2$. Kurvan γ består alltså av alla (x, y, z) sådana att $(x-1)^2 + y^2 = 2$ och $z = 1 + x$. Notera vidare att $(x-1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow |x - 1| \leq \sqrt{2}$ $\Rightarrow 2 - \sqrt{2} \leq 1 + x \leq 2 + \sqrt{2}$. Eftersom $z = 1 + x$ på γ så följer att $2 - \sqrt{2} \leq z \leq 2 + \sqrt{2}$ i varje punkt (x, y, z) på γ. Vidare är $0 < 2 - \sqrt{2}$ och $2 + \sqrt{2} < 4$.

$$\begin{gathered}\text{Kurvan } \gamma \text{ är alltså en enkel sluten kurva i plana området } z = 1 + x,\ 0 < z < 4, \\ \text{och } \gamma \text{ går ett varv kring } z\text{-axeln.}\end{gathered} \tag{15}$$

Vi genomför nu det förutskickade bytet av integrationsväg. Låt Γ vara kurvan $x = 4\cos t$, $y = \sin t$, $z = 4$, $0 \leq t < 2\pi$.

$$\begin{gathered}\text{Kurvan } \Gamma \text{ är då en enkel sluten kurva i planet } z = 4, \\ \text{och } \Gamma \text{ går ett varv kring } z\text{-axeln.}\end{gathered} \tag{16}$$

På Γ är $x^2 + y^2 z^2$ konstant, $x^2 + y^2 z^2 = 16$ för alla $(x, y, z) \in \Gamma$, vilket gör att $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är enkel att beräkna. Låt ytan Y vara någon orienterbar C^1-yta som är innehållen i D, och som går mellan γ och Γ och har γ och Γ som (relativ) rand. Sådan ytor Y finns på grund av (14), (15) och (16). Låt vidare $\mathbf{N}$ vara enhetsnormalen till någon av de båda sidorna av Y. Beroende av val av sida gäller då enligt Stokes sats att antingen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} - \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS \quad \text{eller} \quad \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} - \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Men

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = 0$$

på grund av (13), och alltså är

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

Med hjälp av parametriseringen av Γ får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{4 \sin t}{16} (-4 \sin t) - \frac{16 \cos t}{16} \cos t - 0 \Big)\, dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

och det följer att också

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -2\pi.$$