MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Kaarel Voitk

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4, 5 p.
den 25 maj 2004

Inga hjälpmedel tillåtna. Läs igenom texten i början av skrivtiden. Uppgifterna är inte (avsiktligt) ordnade efter svårighetsgrad. 12 poäng ger säkert godkänt.

1. Beräkna
$$\iiint_K e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz, \quad \text{där } K \text{ är enhetsklotet.} \qquad (4)$$

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \big(\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2+y^2}\big)\,dx + \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dy$, där Γ är vägen längs kurvan $y = e^x$ från punkten $(0,1)$ till $(1,e)$. (4)

3. Ω är en öppen delmängd av $\mathbf{R}^3$. f och g är reellvärda C^2-funktioner på Ω. Den kompakta kroppen $K \subset \Omega$ har en rand ∂K som är en orienterad C^1-yta försedd med utåtriktad enhetsnormal $\mathbf{n}$. Visa formeln
$$\iint_{\partial K} (f\nabla g)\cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_K \big(f\triangle g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)\big)\,dxdydz. \qquad (4)$$

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y + y^2 + z^2, x^3 + 4yz, 2y^2 + 2xz)$ och Γ är skärningskurvan mellan ytan $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ och cylindern $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$ och riktningen är moturs, sedd uppifrån. (4)

5. a) För vilka reella värden på x är potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\ln(1+k)}$ konvergent? (2)

   b) För vilka värden på α är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konvergent? (3)

   Teoridel

   Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa Greens formel för områden i planet med *en* under- och *en* överdel och *en* vänster- och *en* högerdel. Skissera sedan hur Greens formel kan fås för mera allmänna områden i planet. (4)

7. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Låt $a_1, a_2, a_3, \dots$ vara en oändlig följd av tal sådana att
   (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$
   (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

   Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ är konvergent och att seriens summa s uppfyller $0 \leq s \leq a_1$. (4)

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning äger rum torsdagen den 3 juni kl 12.45-13.00 i sal 34 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.