Lösningar till tentamen,
Matematisk analys 4, 5 p. 04-05-25.

1. Vi inför sfäriska koordinater och integrerar över mängden $K' : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten är $r^2 \sin\theta$.

$$\iiint_K e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz =$$

$$= \iiint_{K'} e^r r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2 e^r\, dr =$$

$$= 2\pi\big[-\cos\theta\big]_0^\pi \big[(r^2-2r+2)e^r\big]_0^1 = \underline{4\pi(e-2)}.$$

2. Med sedvanliga beteckningar har vi
$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ och
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(-\dfrac{x}{y^2}) + \dfrac{(x^2+y^2)x - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$
$= \ldots = -\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$. Vi ser att $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i hela övre öppna halvplanet som är en enkelt sammanhängande mängd (och där den givna kurvan ligger). Det finns då en potentialfunktion U där.
$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \arctan\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad U =$
$x\arctan\dfrac{x}{y} - \displaystyle\int x\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{1}{y}\, dx + \int \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx =$
$= x\arctan\dfrac{x}{y} + \phi(y)$.
$\dfrac{y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y} = x\cdot\dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(-\dfrac{x}{y^2}) + \phi'(y) \;\Rightarrow$
$\phi'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y + C$.
Vi använder oss av potentialfunktionen $U(x,y) = x\arctan\frac{x}{y} + y$.
$\displaystyle\int_\Gamma \big(\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2+y^2}\big)\, dx + \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dy =$
$= U(1,e) - U(0,1) = \underline{\arctan\frac{1}{e} + e - 1}.$

3. Vi beräknar divergensen av vektorfältet $f\nabla g$.
$\operatorname{div}(f\nabla g) = \operatorname{div}(f\dfrac{\partial g}{\partial x}, f\dfrac{\partial g}{\partial y}, f\dfrac{\partial g}{\partial z}) =$
$= (\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x} + f\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}) + (\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y} + f\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}) +$
$+(\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial z} + f\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial z}\Big) +$
$+f\Big(\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}\Big) = (\nabla f)\cdot(\nabla g) + f\triangle g.$

Divergenssatsen ger då

$$\iint_{\partial K} (f\nabla g)\cdot\mathbf{n}\, dS =$$

$$= \iiint_K \big(f\triangle g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)\big)\, dxdydz.$$

4. Vi skriver om cylinderns ekvation:
$x^2+2y^2-2x-8y+7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2(y-2)^2 = 2$.
Låt D beteckna ellipsskivan i xy-planet som definieras av olikheten $(x-1)^2+2(y-2)^2 \le 2$.
Låt Y beteckna den del av ytan $z = f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ som ligger innanför cylindern $(x-1)^2+2(y-2)^2 = 2$, dvs funktionsytan $z = f(x,y),\ (x,y)\in D$.
Y förses med uppåtriktad enhetsnormal $\mathbf{n}$.
Vi bestämmer rot$\mathbf{F}$.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 3x^2y+y^2+z^2 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & x^3+4yz & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 2y^2+2xz & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} =$$

$(4y-4y, 2z-2z, 3x^2-3x^2-2y) = (0,0,-2y)$.
Stokes' sats ger

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS =$$

$$= \iint_D (0,0,-2t)\cdot\big(-\frac{\partial f}{\partial s}, -\frac{\partial f}{\partial t}, 1\big)\, dsdt =$$

$$= \iint_D (-2t)\, dsdt.$$

$D : (s-1)^2 + 2(t-2)^2 \le 2 \Leftrightarrow \big(\dfrac{s-1}{\sqrt{2}}\big)^2 + (t-2)^2 \le 1$
Vi inför nya koordinater genom

$$\begin{cases} s-1 = & \sqrt{2}r\cos\phi \\ t-2 = & r\sin\phi \end{cases}$$

Funktionaldeterminanten är $\sqrt{2}r$.
Området D' definieras genom olikheterna
$0 \le r \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$.

$$\iint_D (-2t)\, dsdt = -2\sqrt{2}\iint_{D'} (2 + r\sin\phi) r\, drd\phi =$$

$$= -2\sqrt{2}\Big(\iint_{D'} 2r\, drd\phi + \iint_{D'} r^2\sin\phi\, drd\phi\Big) =$$

$$= -2\sqrt{2}(2\pi + 0) = \underline{-4\sqrt{2}\pi}.$$

5. a) För $x = 1$ får vi serien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\ln(1+k)}$.
Vi jämför denna serie med den harmoniska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k}.$$

$\dfrac{\ln(1+k)}{1+k} \to 0$, då $k \to \infty$ (standardgränsvärde) medför att det finns k_0, så att $\dfrac{\ln(1+k)}{1+k} < 1$ för alla $k \geq k_0$. Det gäller då $0 < \dfrac{1}{1+k} < \dfrac{1}{\ln(1+k)}$ för alla $k \geq k_0$ men eftersom den harmoniska serien är divergent så är även den givna potensserienserien divergent för $x = 1$ och då även divergent för alla x, sådana att $|x| > 1$.

För $x = -1$ får vi den alternerande serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(1+k)}$. Följden $\dfrac{1}{\ln(1+k)}$ är avtagande med gränsvärdet 0 och enligt Leibniz' sats om alternerande serier är då serien konvergent. Potensserien är då konvergent även för alla x, sådana att $|x| < 1$. Sammanfattningsvis konvergerar potensserien precis då $\underline{-1 \leq x < 1}$.

b) För konvergens fordras att både (i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ och (ii) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konvergerar.

(i) Vi använder kvotjämförelse mellan positiva funktioner vid $x = 0$

$$\frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-1}}} = \frac{\sin x}{x} \to 1 > 0, \text{ då } x \to 0^+.$$

Härav följer den första ekvivalensen nedan; den andra är standard.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \text{ konv.} \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx \text{ konv.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha - 1 < 1\ \Leftrightarrow\ \alpha < 2.$$

(ii) Antag att α är ≤ 0.

Vi visar att $F(X) = \displaystyle\int_{\pi}^{X} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ inte har något ändligt gränsvärde då $X \to \infty$, varför den generaliserade integralen är divergent. Sätt $\beta = -\alpha \geq 0$. x^β är växande.

$$F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx =$$

$$= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^\beta \sin x\,dx \geq$$

$$\geq (2n\pi)^\beta \int_{2n\pi}^{2n+1)\pi} \sin x\,dx \not\to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Detta medför att $\lim\limits_{X\to\infty} F(X)$ inte existerar ändligt. $\alpha > 0$ är således ett nödvändigt villkor för konvergens.

Låt nu α vara > 0.

$$F(X) = \int_{\pi}^{X} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} - \int \alpha \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx\right]_{\pi}^{X} =$$

$$= \frac{-\cos X}{X^\alpha} - \frac{1}{\pi^\alpha} - \alpha \int_{\pi}^{X} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx,$$

där den första termen går mot 0, då $X \to \infty$ (och den andra är konstant). Vi visar att även den tredje termen har ett gränsvärde:

$$0 \leq \int_{\pi}^{X} \left|\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\right| dx \leq \int_{\pi}^{X} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx <$$

$$< \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx < \infty$$

Det följer att den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ är (absolut) konvergent, dvs $\displaystyle\int_{\pi}^{X} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ har ett gränsvärde då $X \to \infty$. $F(X)$ har då ett gränsvärde då $X \to \infty$, dvs $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ är konvergent.

Den givna generaliserade integralen är alltså <u>konvergent precis då $0 < \alpha < 2$</u>.

6. Se exempelvis kurslitteraturen.

7. Se exempelvis kurslitteraturen.