

Inga hjälpmedel tillåtna. Läs igenom texten i början av skrivtiden. Uppgifterna är inte (avsiktligt) ordnade efter svårighetsgrad. 13 poäng ger säkert godkänt.

1. Beräkna volymen av kroppen K , definierad genom olikheterna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases} . \quad (4)$$

2. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{x} dx - \frac{1}{xy} dy$, där Γ är vägen längs kurvan

$$y = \frac{x^2 - x + 6}{6} \text{ från } (1, 1) \text{ till } (3, 2). \quad (4)$$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2z^2 + y^2z^2 + xyz, xz - 2xyz^2 - \frac{y^2z}{2}, ze^{x^2+y^2})$, Y är den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$, där $0 \leq z \leq 4$.

Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, där enhetsnormalen \mathbf{n} har negativ z -komponent. (4)

4. Ω är en öppen delmängd av \mathbf{R}^3 . För de reellvärda funktionerna f och g gäller $f \in C^1(\Omega)$ och $g \in C^2(\Omega)$. Y är en orienterad C^1 -yta i Ω med enhetsnormalen \mathbf{n} . Den slutna C^1 -kurvan γ är randkurva till Y .

Visa formeln

$$\iint_Y (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\gamma} (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r},$$

där omloppsriktningen i kurvintegralen är moturs, sedd från spetsen av \mathbf{n} . (4)

5. a) För vilka värden på x är serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ konvergent? (1)

b) Bestäm summan av serien för alla reella tal x , för vilka serien konvergerar. (3)

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Låt \mathbf{F} vara ett kontinuerligt vektorfält, definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegralen av \mathbf{F} i Ω är oberoende av vägen om och endast om \mathbf{F} har en potential i Ω . (6)

7. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt a_1, a_2, a_3, \dots vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa implikationen $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (6)

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning äger rum tisdagen den 24 augusti kl 16.45-17.00 i sal 34 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.