Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematisk analys 4 den 19 augusti 2004

1. För varje $y_0 \in [-1,1]$ utgörs skärningen mellan planet $y = y_0$ och kroppen K av kvadratskivan $\{(x,y,z) | -\sqrt{1-y_0^2} \le x \le \sqrt{1-y_0^2},\ y = y_0,\ -\sqrt{1-y_0^2} \le z \le \sqrt{1-y_0^2}\}$. Dennas kantlängd är $2\sqrt{1-y_0^2}$ och area $4(1-y_0^2)$.
Enligt skivmetoden för beräkning av volym är volymen av K
$\int_{-1}^{1} 4(1-y^2)\,dy = 4\big[y - y^3/3\big]_{-1}^{1} = \underline{16/3}$.

2. Sätt $P(x,y) = \dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{y}{x}$, $Q(x,y) = -\dfrac{1}{xy}$. Kurvan Γ ligger helt i första kvadranten. Där gäller
$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2 y}$ och $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{1}{x^2}\ln y - \dfrac{1}{x^2}\ln x) = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{y} - 0$, dvs $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i första kvadranten. Det finns då en potentialfunktion U där.
$\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{1}{xy} \ \Rightarrow\ U = -\dfrac{1}{x}\ln y + g(x)$.
$\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{y}{x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2}\ln y + g'(x) \ \Rightarrow\ g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln x \ \Rightarrow\ g(x) = \dfrac{1}{x}\ln x - \displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \dfrac{1}{x}\ln x + \dfrac{1}{x} + C$.
$U = -\dfrac{1}{x}\ln y + \dfrac{1}{x}\ln x + \dfrac{1}{x}$ är då en potentialfunktion i första kvadranten.
Den givna kurvintegralens värde är $U(3,2) - U(1,1) = \underline{\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3}}$.

3. Ytan Y är formad som en kupa.
Låt Y_0 beteckna kupans lock, dvs $Y_0 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2+y^2 \le 4,\ z = 4\}$.
$Y \cup Y_0$ är då randen till den solida kroppen $K = \{(x,y,z) | x^2+y^2 \le z \le 4,\ x^2+y^2 \le 4\}$.
Det gäller (den andra likheten enligt divergenssatsen)

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{Y\cup Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV.$$

$\mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz^2 + yz) + (-2xz^2 - yz) + e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}$.

$$\iiint_K e^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 4}\Big(\int_{x^2+y^2}^{4} e^{x^2+y^2}\,dz\Big)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4}\big(4-(x^2+y^2)\big)e^{x^2+y^2}\,dxdy =$$
$$= \iint_{(r,\phi)\in[0,2]\times[0,2\pi]} (4r - r^3)e^{r^2}\,drd\phi = 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)e^{r^2}\,dr = 2\pi\Big[\big(\frac{5-r^2}{2}\big)e^{r^2}\Big]_0^2 = \pi(e^4-5).$$

Den utåtriktade enhetsnormalvektorn från Y_0 är $(0,0,1)$, så

$$\iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 4} 4e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{(r,\phi)\in[0,2]\times[0,2\pi]} 4re^{r^2}\,drd\phi = 4\pi\big[e^{r^2}\big]_0^2 = 4\pi(e^4-1).$$
$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \pi(e^4-5) - 4\pi(e^4-1) = \underline{-(3e^4+1)\pi}.$$

4. ∇g är ett C^1-vektorfält på Ω och det är då även $f\nabla g$.
Enligt Stokes' sats gäller

$$\int_\gamma (f\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathrm{rot}(f\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Kan vi verifiera att $\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$ så är den givna formeln visad.

$$\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla \times (f\nabla g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f\frac{\partial g}{\partial x} & \mathbf{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & f\frac{\partial g}{\partial y} & \mathbf{e}_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & f\frac{\partial g}{\partial z} & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} =$$

$$\Big((\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}) - (\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}), (\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}) - (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}), (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}) - (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}) \Big) =$$

$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \Big). \qquad (1)$$

Att $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}$ osv följer av att $g \in C^2(\Omega)$.

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & \mathbf{e}_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \mathbf{e}_y \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \Big). \qquad (2)$$

Jämför vi (1) och (2) finner vi att $\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$. Den givna formeln är alltså giltig.

5. a) $|k^2 x^k|^{1/k} = \big(k^{1/k}\big)^2 |x| \to 1^2|x| = |x|$, då $k \to \infty$.
Enligt Cauchys rotkriterium är serien konvergent då $|x| < 1$ och divergent då $|x| > 1$. Då $|x| = 1$ går inte allmänna termen mot 0, då $k \to \infty$, varför serien i detta fall är divergent.
Serien är alltså konvergent precis då $|x| < 1$.
b) För $|x| < 1$ gäller $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (summan av en konvergent geometrisk serie). Potensserier får deriveras termvis i det inre av konvergensintervallet som här är lika med hela konvergensintervallet, så

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ vilket efter multiplikation med } x \text{ ger } \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Derivering ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{(1-x)^2 \cdot 1 - x \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \text{ vilket medför } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \underline{\frac{x+x^2}{(1-x)^3}}.$$

6. och 7. Se exempelvis kurslitteraturen.