MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Kaarel Voitk

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4, 5 p.
den 16 december 2004

Inga hjälpmedel tillåtna. Läs igenom texten i början av skrivtiden. Uppgifterna är inte (avsiktligt) ordnade efter svårighetsgrad. 13 poäng ger säkert godkänt.

1. Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + (y - x^2)^2 + z^2 \leq 1\}$. (4)

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\Gamma \frac{2xe^y}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{e^y(x^2+y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$
där Γ är vägen från $(0, 2)$ till $(0, -2)$ längs den del av ellipsen $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ som ligger till vänster om y-axeln. (4)

3. $\mathbf{F}(x, y, z,) = (xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \tan z, x^2 z + y^2)$, Y är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, där enhetsnormalen $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent. (4)

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + \sin x, z^2 + \cos y, x^3)$, C är den slutna kurvan $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin 2t)$, där t går från 0 till 2π. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
(Att C ligger i en funktionsyta $z = f(x, y)$ kan kanske vara av intresse.) (4)

5. Undersök om serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Big)$$
är konvergent eller divergent. (4)

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa implikationen
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (6)

7. (Satsen om en potensseries konvergensradie.) Visa att för en potensserie kring 0 i variabeln x gäller något av följande tre alternativ.
(i) Potensserien konvergerar enbart för $x = 0$.
(ii) Det finns ett tal $r > 0$ sådant att potensserien är absolutkonvergent om $|x| < r$ och divergent om $|x| > r$.
(iii) Potensserien är absolutkonvergent för alla x. (6)

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning äger rum måndagen den 20 december kl 14.45-15.00 i sal 33 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.