Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematisk analys 4 den 16 december 2004

1. För varje $x \in [-1,1]$ är arean av området (cirkelskivan) $D_x = \{(y,z) \in \mathbf{R}^2 |\ (y-x^2)^2 + z^2 \leq 1 - x^2\}$ $A(D_x) = \pi(1-x^2)$. Volymen av kroppen K är då

$$\int_{-1}^{1} \Big(\iint_{D_x} 1\, dydz \Big)\, dx = \int_{-1}^{1} A(D_x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)\, dx = \pi \Big[x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{1} = \underline{\frac{4\pi}{3}}.$$

Alternativt:

$$\text{Via variabelbytet} \quad \begin{cases} u &= x \\ v &= y - x^2 \\ w &= z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= u \\ y &= u^2 + v \\ z &= w \end{cases}$$

svarar K mot enhetsklotet $K' = \{(u,v,w)|\ u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$.

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Volymen av K, $V(K) = \iiint_K dxdydz = \iiint_{K'} 1\, dudvdw = V(K') = \dfrac{4\pi}{3}$.

(Ett klot med radien r har volymen $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.)

2. Med gängse beteckningar har vi

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{(x^2+y^2)^2 e^y 2x - e^y(x^2+y^2-2y)(2(x^2+y^2)2x)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{2xe^y(x^2+y^2-4y)}{(x^2+y^2)^3}$ och

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{(x^2+y^2)^2 2xe^y - 2xe^y(2(x^2+y^2)2y)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{2xe^y(x^2+y^2-4y)}{(x^2+y^2)^3}$

Alltså gäller $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i $D = \mathbf{R}^2 - \{(x,0)|\ x \geq 0\}$ som är en enkelt sammanhängande öppen mängd. $\Gamma \subset D$.

Då förändras inte kurvintegralens värde om vi väljer en annan väg i D från $(0,2)$ till $(0,-2)$.

Det finns även en potentialfunktion U till $\mathbf{F}$ i D. Vi bestämmer U.

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{2xe^y}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad U = -\dfrac{e^y}{x^2+y^2} + g(y)$

$-\dfrac{e^y(x^2+y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{(x^2+y^2)e^y - e^y 2y}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 0.$

$U(x,y) = -\dfrac{e^y}{x^2+y^2}$ är en potentialfunktion och kurvintegralens värde är

$U(0,-2) - U(0,2) = \big(-\frac{e^{-2}}{4}\big) - \big(-\frac{e^2}{4}\big) = \underline{\frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})}.$

3. Vi lägger till en bottenyta $Y_0 = \{(x,y,0)|\ x^2+y^2 \leq 1\}$ och förser denna med den nedåtriktade enhetsnormalen $\mathbf{n} = (0,0,-1)$.

Den slutna ytan $Y \cup Y_0$ är då i varje punkt försedd med den utåtriktade enhetsnormalen $\mathbf{n}$ och är randyta till kroppen $K = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$.

Det gäller (den andra likheten enligt divergenssatsen)

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{Y_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{Y \cup Y_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV. \quad (i)$$

$\text{div}\mathbf{F}(x,y,z) = z^2 + y^2 + x^2.$

$$\iiint_K (z^2 + y^2 + x^2)\, dV = [\text{sfäriska koord.}, K' : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \phi \le 2\pi] =$$

$$\iiint_{K'} r^2 r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi = \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{5} \quad (ii)$$

$$\iint_{Y_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (0, \frac{1}{3}y^3, y^2) \cdot (0,0,-1) \, dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 1} y^2 \, dxdy =$$

$$= -\iint_{(r,\phi)\in[0,1]\times[0,2\pi]} r^3 \sin^2\phi \, dr d\phi = -\frac{1}{4}\frac{2\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \quad (iii).$$

$$(i), (ii) \text{ och } (iii) \text{ medför} \quad \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \underline{\frac{13\pi}{20}}.$$

4. Kurvan C genomlöps moturs, sedd uppifrån. Om kurvan är randkurva till en $\mathcal{C}^1$-yta Y, så gäller enligt Stokes sats:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

där $\mathbf{n}$ är den uppåtriktade enhetsnormalen till ytan Y.
$\sin 2t = 2\cos t \sin t$.
Vi sätter $f(x,y) = 2xy$. C är då randkurva till funktionsytan $Y = \{(x,y,f(x,y)) | \; x^2 + y^2 \le 1\}$

$$\text{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & y + \sin x & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & z^2 + \cos y & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & x^3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (-2z, -3x^2, -1)$$

$$\iint_Y \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \text{rot}\mathbf{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_1'(x,y), -f_2'(x,y), 1) \, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-4xy, -3x^2, -1) \cdot (-2y, -2x, 1) \, dxdy = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (8xy^2 + 6x^3 - 1) \, dxdy = \underline{-\pi}.$$

$\iint_{x^2+y^2\le 1} (8xy^2 + 6x^3) \, dxdy = 0$ eftersom integranden är en udda funktion i x och integrationsområdet är symmetriskt kring $x = 0$.
$\iint_{x^2+y^2 \le 1} 1 \, dxdy =$ arean av enhetscirkelskivan $= \pi$

5.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \ge n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{n}$$

och

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$$

är en känd divergent positiv serie. Detta medför att den givna serien är <u>divergent</u>.

6. och 7. Se exempelvis kurslitteraturen.