MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Kaarel Voitk

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4, 5 p.
den 13 januari 2005

Inga hjälpmedel tillåtna. Läs igenom texten i början av skrivtiden. Uppgifterna är inte (avsiktligt) ordnade efter svårighetsgrad. 13 poäng ger säkert godkänt.

1. Beräkna värdet av den itererade integralen
$$\int_0^2 \Big(\int_y^2 \Big(\int_0^{4-x^2} \frac{\sin 2z}{4-z}\, dz\Big)\, dx\Big)\, dy. \qquad (4)$$

2. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \frac{y^2}{1+x^2y^4}\,dx + \Big(\frac{2xy}{1+x^2y^4} + e^x\Big)\,dy$, där C är kurvan $|x|+|y|=1$ moturs. (4)

3. $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^3+12xy^2, y^3+e^y\sin z, 5z^3+e^y\cos z)$.
$Y = Y_1 \cup Y_2$, där Y_1 är ytan $x^2+y^2+z^2=1$ och Y_2 är ytan $x^2+y^2+z^2=2$.
$\mathbf{n}$ är enhetsnormalen till Y som på Y_1 pekar mot origo och på Y_2 pekar från origo.
Beräkna ytintegralen $\displaystyle\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$. (4)

4. Antag att Y är ett orienterat ytstycke med den orienterade randkurvan Γ (om $\mathbf{n}$ är ytans enhetsnormal gemomlöps Γ moturs, sett från spetsen av $\mathbf{n}$). $\mathbf{a}$ är en fix vektor.
Visa likheten $\displaystyle\int_\Gamma (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 2\iint_Y \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS$ där $\mathbf{r}=(x,y,z)$. (4)

5. a) För vilka reella tal x konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$? (2)

   b) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$. (2)

   Teoridel

   Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ då båda är konvergenta och divergenta samtidigt. (6)

7. (Cauchys rotkriterium.) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att
$$|a_k|^{1/k} \to A, \text{ då } k\to\infty, \quad \text{där } 0 \leq A \leq \infty.$$
Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$ och divergent om $1 < A \leq \infty$. (6)

   Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

   Skrivningsåterlämning äger rum måndagen den 17 januari kl 16.30-16.45 i sal 33 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.