Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematisk analys 4 den 13 januari 2005

1. Vi kan skriva den itererade integralen som en trippelintegral

$$\int_0^2 \Big(\int_y^2 \Big(\int_0^{4-x^2} \frac{\sin 2z}{4-z}\, dz \Big)\, dx \Big)\, dy = \iiint_K \frac{\sin 2z}{4-z}\, dV,$$

där kroppen K ges av $\begin{cases} 0 & \le z & \le & 4-x^2 \\ y & \le x & \le & 2 \\ 0 & \le y & \le & 2 \end{cases}$.

K kan beskrivas på ett lämpligare sätt: $\begin{cases} 0 & \le z & \le & 4-x^2 \\ y & \le x & \le & 2 \\ 0 & \le y & \le & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & \le x & \le & \sqrt{4-z} \\ 0 & \le y & \le & \sqrt{4-z} \\ 0 & \le z & \le & 4 \end{cases}$

(Förvissa dig om implikationernas riktighet i båda riktningarna!)
Den senare beskrivningen av K ger oss

$$\iiint_K \frac{\sin 2z}{4-z}\, dV = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-z}} \Big(\int_y^{\sqrt{4-z}} \frac{\sin 2z}{4-z}\, dx \Big)\, dy \Big)\, dz =$$

$$= \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-z}} \Big(\frac{\sin 2z}{4-z} (\sqrt{4-z} - y)\, dy \Big)\, dz = \int_0^4 \frac{\sin 2z}{4-z} \Big[y\sqrt{4-z} - \frac{y^2}{2} \Big]_{y=0}^{y=\sqrt{4-z}}\, dz =$$

$$= \int_0^4 \frac{\sin 2z}{2}\, dz = \Big[-\frac{\cos 2z}{4} \Big]_0^4 = \underline{\frac{1}{4}(1-\cos 8)}.$$

2. $$\int_C \frac{y^2}{1+x^2y^4}\, dx + \Big(\frac{2xy}{1+x^2y^4} + e^x\Big)\, dy = \Big(\int_C \underbrace{\frac{y^2}{1+x^2y^4}}_{P}\, dx + \underbrace{\frac{2xy}{1+x^2y^4}}_{Q}\, dy \Big) + \int_C e^x\, dy.$$

Det gäller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(1+x^2y^4)2y - 2xy \cdot 2xy^4}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y(1-x^2y^4)}{(1+x^2y^4)^2} \text{ och}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(1+x^2y^4)2y - y^2 \cdot x^2 4y^3}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y(1-x^2y^4)}{(1+x^2y^4)^2}$$

Alltså gäller $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Detta medför $\displaystyle\int_C \frac{y^2}{1+x^2y^4}\, dx + \frac{2xy}{1+x^2y^4}\, dy = 0.$

Den givna kurvintegralen är alltså lika med $\displaystyle\int_C e^x\, dy$.

Denna kurvintegral kan vi antingen med hjälp av Greens formel göra om till en dubbelintegral eller skriva som en summa av fyra kurvintegraler, parametrisera och skriva dem som vanliga enkelintegraler. Vi väljer den andra metoden. De fyra bitarna parametriseras.

Från $(1,0)$ till $(0,1)$: $(x,y) = (t, 1-t)$, där t går från 1 till 0.
Från $(0,1)$ till $(-1,0)$: $(x,y) = (t, 1+t)$, där t går från 0 till -1.
Från $(-1,0)$ till $(0,-1)$: $(x,y) = (t, -1-t)$, där t går från -1 till 0.
Från $(0,-1)$ till $(1,0)$: $(x,y) = (t, -1+t)$, där t går från 0 till 1.

$$\int_C e^x\, dy = \int_1^0 e^t(-1)\, dt + \int_0^{-1} e^t\, dt + \int_{-1}^0 e^t(-1)\, dt + \int_0^1 e^t\, dt = -\big[e^t\big]_1^0 + \big[e^t\big]_0^{-1} - \big[e^t\big]_{-1}^0 + \big[e^t\big]_0^1 =$$

$$= -(1-e) + (e^{-1}-1) - (1-e^{-1}) + (e-1) = \underline{2(e-2+e^{-1})}.$$

3. Den kropp som ligger mellan de två sfärerna Y_1 och Y_2 betecknas K.
Enhetsnormalen $\mathbf{n}$ pekar utåt från K.
För beräkning av den givna ytintegralen användes divergenssatsen.
$\text{div}\mathbf{F}(x,y,z) = (15x^2+12y^2)+(3y^2+e^y\sin z)+(15z^2-e^y\sin z) = 15(x^2+y^2+z^2)$.

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_K 15(x^2+y^2+z^2)\,dV =_{(*)} 15\iiint_{K'} r^2r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi =$$

$$= 15\Big[\frac{r^5}{5}\Big]_1^{\sqrt{2}}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\Big[\phi\Big]_0^{2\pi} = \underline{12\pi(4\sqrt{2}-1)}.$$

(*) Sfäriska koordinater; K' : $1\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi$.

4. $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$. Sätt

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{a}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} a_1 & x & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & y & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & z & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (a_2z-a_3y, a_3x-a_1z, a_1y-a_2x).$$

$$\text{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & a_2z-a_3y & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & a_3x-a_1z & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & a_1y-a_2x & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (2a_1,2a_2,2a_3) = 2\mathbf{a}.$$

Stokes sats används för den andra likheten nedan.

$$\int_\Gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \text{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_Y 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\iint_Y \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

5.a) $a_n(x) = \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$. För $x=0$ är serien konvergent. För $x\neq 0$ gäller $\dfrac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \dfrac{2+1/n}{2+3/n}|x|^2 \to |x|^2$, då $n\to\infty$. Enligt d'Alemberts kvotkriterium är serien konvergent då $|x|^2<1$, dvs då $|x|<1$, och divergent då $|x|^2>1$, dvs då$|x|>1$.
(i) För $x=1$ är serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ som är divergent.
För motiveringen kan exempelvis kvotjämförelsekriteriet för positiva serier användas:
$\dfrac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2+1/n} \to \dfrac{1}{2} > 0$ då $n\to\infty$ och $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ är en känd divergent positiv serie (harmoniska serien).
(ii) För $x=-1$ är serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{2n+1}$, vars divergens följer av (i).
Serien är konvergent precis då $\underline{-1<x<1}$.
b) Sätt $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$. Notera att $f(0)=0$. Vi skall beräkna $f(\frac{1}{2})$.
f är deriverbar i det inre av konvergensintervallet, termvis derivering är tillåten och
$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = [\text{geom. serie}] = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x}+\frac{1/2}{1-x}$.
Detta ger $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)+C$ och eftersom $f(0)=0$ är $C=0$.
Alltså $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, vilket ger $f(\dfrac{1}{2}) = \underline{\dfrac{1}{2}\ln 3}$.

6. och 7. Se exempelvis kurslitteraturen.