MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
050524

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Bestäm för var och en av serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(e^{1/k} - 1\right) \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 4^k}{(2k)!}$$

om serien konvergerar eller ej. 3 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $x(1-x^2)y'' + (1-x^2)y' + xy = 0$ med bivillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 3 p

2. Beräkna arean av den del av cylinderytan $y^2 + z^2 = 4$ där $y \geq |x| + 1$. 4 p

3. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\big)$ vara ett vektorfält, Y en yta och D ett område i rummet. Den vektorvärda ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\, dS$ och den vektorvärda volymintegralen $\iiint_D \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$ definieras då genom att sätta

$$\iint_Y \mathbf{F}\, dS = \left(\iint_Y F_1\, dS, \iint_Y F_2\, dS, \iint_Y F_3\, dS\right) \quad \text{och}$$

$$\iiint_D \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = \left(\iiint_D F_1\, dx\, dy\, dz, \iiint_D F_2\, dx\, dy\, dz, \iiint_D F_3\, dx\, dy\, dz\right),$$

om yt- och volymintegralerna i de båda högerleden ovan existerar.

a) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i rummet. Visa att om $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ så är vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \big((\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1, (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_2, (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_3\big)$ där

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 = (0, v_3, -v_2) \cdot \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_2 = (-v_3, 0, v_1) \cdot \mathbf{u} \quad \text{och} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_3 = (v_2, -v_1, 0) \cdot \mathbf{u}.$$ 1 p

b) Låt D vara en öppen begränsad delmängd av rummet sådan att delmängdens begränsningsyta Y är en C^1-yta. Låt vidare $\mathbf{F}(x,y,z)$ vara ett vektorfält i rummet sådant att $\mathbf{F}$ är C^1 på mängden $D \cup Y$. Låt slutligen $\mathbf{N}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till ytan Y. Visa att då gäller att

$$\iint_Y \mathbf{N} \times \mathbf{F}\, dS = \iiint_D \nabla \times \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz.$$ 3 p

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \left(2xyz^3 + 2yz^2\right) dx + \left(xz^2 + x^2z^3\right) dy + \left(2xyz + 3x^2yz^2\right) dz$, om γ är skärningskurvan mellan cylinderytan $(x-1)^2 + y^2 = 1$ och halvklotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z \geq 0$, och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. 4 p

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{\cos x \sin y}{\sin^2 x + \sin^2 y}\, dx + \frac{\sin x \cos y}{\sin^2 x + \sin^2 y}\, dy,$$

om γ är ett varv moturs längs den kvadratiska kurvan med kvadrathörnen i de fyra punkterna $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$, och också om γ istället är ett varv moturs längs cirkeln $x^2 + y^2 = 16$.

4 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 6 p

7. (d'Alemberts kvotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ har nollskilda termer sådana att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning ti 31/5 kl 12.00-12.15 i rum 328 hus 6, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.