Lösningar till Matematisk analys 4, 050524

1. a) Sätt
$$a_k = \frac{k+1}{k^2+1}, \quad b_k = (-1)^k \left(e^{1/k} - 1\right) \quad \text{och} \quad c_k = \frac{(k!)^2 4^k}{(2k)!} \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots .$$
Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är positiv. Vi har att
$$a_k = \frac{k+1}{k^2+1} \approx \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} \quad \text{för stora } k$$
och mera precist att
$$a_k \Big/ \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k^2+1} k = \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1 \quad k \to \infty,$$
och eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är en divergent standardserie följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är alternerande. Vi har att $|b_k| = e^{1/k} - 1$ är avtagande i k för $k = 1, 2, \ldots$ ty e^x är växande i x, och vi har också att $|b_k| = e^{1/k} - 1 \to e^0 - 1 = 0$ då $k \to \infty$, och alltså konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ enligt Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier.

För serien $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ notera att
$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{\big((k+1)!\big)^2 4^{k+1}}{\big(2(k+1)\big)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 4^k} = \frac{\big((k+1)!\big)^2 4^{k+1}}{(2k+2)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 4^k} =$$
$$= \frac{4(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{2k+2}{2k+1} > 1 \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots,$$
varav fås att $2 = c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$. Alltså gäller ej att $c_k \to 0$ då $k \to \infty$, och således divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

b) Eftersom $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ kan den sökta potensserielösningen skrivas
$$y = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k,$$
och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att
$$y' = \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} \text{ och att } y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$
Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att
$$x(1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + (1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x\big(1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k\big) = 0. \tag{1}$$
Men
$$x\big(1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k\big) = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{k+1},$$

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k-1} - x^2 \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k-1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k-1}}_{\text{Sätt } \ell = k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k+1} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)a_{\ell+2}x^{\ell+1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} - \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)a_{k+2}x^{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k+1} = 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(k+2)a_{k+2}x^{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^{k+1} =$$

$$= 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\big((k+2)a_{k+2} - ka_k\big)x^{k+1}$$

och

$$x(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - x^3 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1}}_{\text{Sätt } \ell = k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2}x^{\ell+1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} =$$

$$= 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} =$$

$$= 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\big((k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k\big)x^{k+1}$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$(4a_2+1)x + 9a_3x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\big((k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - ka_k + a_k\big)x^{k+1} = 0$$

eller ekvivalent

$$(4a_2+1)x + 9a_3x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\big((k+2)^2 a_{k+2} - (k-1)(k+1)a_k\big)x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att

$$(k+2)^2 a_{k+2} - (k-1)(k+1)a_k = 0, \quad k = 2, 3, \ldots$$

samt att

$$4a_2 + 1 = 9a_3 = 0,$$

och alltså att

$$a_{k+2} = \frac{(k-1)(k+1)}{(k+2)^2}a_k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

samt att

$$a_2 = -\frac{1}{4}, \; a_3 = 0.$$

Av $a_3 = 0$ och (2) följer att

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0,$$

dvs att

$$a_{2k+1} = 0 \text{ för } k = 1, 2, \ldots .$$

Av $a_2 = -\frac{1}{4}$ och (2) följer att

$$a_4 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} a_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2},$$

$$a_6 = \frac{3 \cdot 5}{4^2} a_4 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2},$$

$$a_8 = \frac{5 \cdot 7}{6^2} a_6 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2},$$

$$\vdots,$$

dvs att

$$a_{2k} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2} \quad \text{för } k = 2, 3, \ldots .$$

Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y = 1 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2} x^{2k} \tag{3}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2} x^{2k} \quad \text{för } k = 2, 3, \ldots .$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k+1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2} |x|^{2k+2} \cdot (2k-1) \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{|x|^{2k}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} |x|^2 = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\left(1 + \frac{1}{2k}\right) |x|^2 \to (1-0)(1+0)|x|^2 = |x|^2 \quad \text{då } k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent om $|x|^2 < 1$ och divergent om $|x|^2 > 1$. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| > 1$, och följdaktligen är potensserielösningens konvergensradie 1 (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerential-ekvationen i intervallet $-1 < x < 1$).

Anmärkning. Vi har att

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-2) \cdot (2k-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-2) \cdot (2k-1)}{2^{k-1} \cdot \big(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)\big)^2} = \frac{(2k-1)!}{2^{k-1} \cdot \big((k-1)!\big)^2},$$

och alltså att

$$a_{2k} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k-2)^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot \left(\frac{(2k-1)!}{2^{k-1} \cdot \big((k-1)!\big)^2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4^k (2k-1)} \cdot \frac{\big((2k-1)!\big)^2}{\big((k-1)!\big)^4} \quad \text{för } k = 2, 3, \ldots .$$

Vi noterar att slutformeln här ovan för a_{2k} stämmer även för $k = 1$. Den erhållna potensserielösningen (3) kan alltså även skrivas

$$y = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k-1)} \cdot \frac{\big((2k-1)!\big)^2}{\big((k-1)!\big)^4} x^{2k}.$$

2. Ytan $y^2 + z^2 = 4$ är en rät cirkulär cylinderyta (obegränsat lång åt båda hållen) med radien 2 och x-axeln som centrumlinje. Låt A_1 vara arean av den del av cylinderytan $y^2 + z^2 = 4$ där $y \geq |x| + 1$ och låt A_2 vara arean av den del av ytan $z = \sqrt{4 - y^2}$ där $y \geq |x| + 1$. Eftersom $y^2 + z^2 = 4 \iff z = \pm\sqrt{4 - y^2}$ gäller att $A_1 = 2A_2$. Av $y^2 + z^2 = 4$ följer att $y^2 \leq 4 \iff |y| \leq 2$. Låt D vara det område i xy-planet där $|y| \leq 2$, $y \geq |x| + 1$. Sambandet $z = \sqrt{4 - y^2}$ ger att

$$z'_x = 0, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - y^2}} \quad \text{och} \quad \sqrt{1 + \big(z'_x\big)^2 + \big(z'_y\big)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4 - y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - y^2}}.$$

Enligt formel för area av funktionsyta gäller därför att

$$A_2 = \iint_D \sqrt{1 + \big(z'_x\big)^2 + \big(z'_y\big)^2}\, dx\, dy = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Eftersom (rita figur) $(x, y) \in D \iff |y| \leq 2,\ y \geq |x| + 1 \iff |x| + 1 \leq y \leq 2 \iff 1 \leq y \leq 2$, $1 - y \leq x \leq y - 1$ får vi att sökt area

$$A_1 = 2A_2 = 4 \iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}\, dx\, dy = 4 \int_1^2 \left(\int_{1-y}^{y-1} \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}\, dx \right) dy =$$

$$= 4 \int_1^2 \left(\left[\frac{x}{\sqrt{4 - y^2}} \right]_{x=1-y}^{x=y-1} \right) dy = 4 \int_1^2 \frac{y - 1 - (1 - y)}{\sqrt{4 - y^2}}\, dy = 8 \int_1^2 \frac{y - 1}{\sqrt{4 - y^2}}\, dy =$$

(Gör substitutionen $y = 2u$.)

$$= 8 \int_{1/2}^1 \frac{2u - 1}{\sqrt{4 - 4u^2}}\, 2du = 8 \int_{1/2}^1 \frac{2u - 1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du = 8 \int_{1/2}^1 \left(2u \left(1 - u^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \right) du =$$

$$= 8 \left[-2\left(1 - u^2\right)^{1/2} - \arcsin u \right]_{1/2}^1 = 8 \left(-0 - \arcsin 1 - \left(-\sqrt{3} - \arcsin \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$= 8 \left(\sqrt{3} - \arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} \right) = 8 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 8 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

3. a) Inför även komponenterna för vektorn $\mathbf{u}$. Säg att $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Vi har då att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \big(u_1, u_2, u_3\big) \times \big(v_1, v_2, v_3\big) =$$

$$= \big(u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1\big) = \big(u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1\big) =$$

$$= \Big(\big(0, v_3, -v_2\big) \cdot \big(u_1, u_2, u_3\big),\ \big(-v_3, 0, v_1\big) \cdot \big(u_1, u_2, u_3\big),\ \big(v_2, -v_1, 0\big) \cdot \big(u_1, u_2, u_3\big) \Big) =$$

$$= \Big(\big(0, v_3, -v_2\big) \cdot \mathbf{u},\ \big(-v_3, 0, v_1\big) \cdot \mathbf{u},\ \big(v_2, -v_1, 0\big) \cdot \mathbf{u} \Big)$$

och den påstådda likheten är visad.

b) Om $\mathbf{G}$ är en vektor i rummet låter vi G_k för $k = 1, 2, 3$, eller när det passar bättre $\big(\mathbf{G}\big)_k$ för $k = 1, 2, 3$, beteckna komponenterna för $\mathbf{G}$. Vi har då att

$$\iint_Y \mathbf{N} \times \mathbf{F}\, dS =$$

(Enligt definitionen av vektorvärd ytintegral.)

$$= \left(\iint_Y \big(\mathbf{N} \times \mathbf{F}\big)_1 \, dS, \iint_Y \big(\mathbf{N} \times \mathbf{F}\big)_2 \, dS, \iint_Y \big(\mathbf{N} \times \mathbf{F}\big)_3 \, dS \right) =$$

(Enligt a).)

$$= \left(\iint_Y \big(0, F_3, -F_2\big) \cdot \mathbf{N}\, dS, \iint_Y \big(- F_3, 0, F_1\big) \cdot \mathbf{N}\, dS, \iint_Y \big(F_2, -F_1, 0\big) \cdot \mathbf{N}\, dS \right) =$$

(Enligt divergenssatsen tillämpad på var och en av komponenterna.

(Divergenssatsen kan så användas enligt de i problemtexten

angivna förutsättningarna på D, Y och $\mathbf{F}$.))

$$= \left(\iiint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz, \iiint_D \left(-\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz, \iiint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz \right) =$$

$$\Bigg(\text{Eftersom } \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \big(F_1, F_2, F_3\big) =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \Bigg)$$

$$= \left(\iiint_D \big(\nabla \times \mathbf{F}\big)_1 \, dx\, dy\, dz, \iiint_D \big(\nabla \times \mathbf{F}\big)_2 \, dx\, dy\, dz, \iiint_D \big(\nabla \times \mathbf{F}\big)_3 \, dx\, dy\, dz \right) =$$

(Enligt definitionen av vektorvärd volymintegralintegral.)

$$= \iiint_D \nabla \times \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz,$$

och den påstådda likheten är visad.

4. Vi beräknar kurvintegralen genom att använda Stokes sats. Sambanden $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z \geq 0$ ger att $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$. Låt Y beteckna den del av halvklotytan $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ där $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{5 - u^2 - v^2}$, $(u-1)^2 + v^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, \sqrt{5 - u^2 - v^2}\big)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{5 - u^2 - v^2}} \right), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{5 - u^2 - v^2}} \right) \quad \text{och}$$

$$\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{5 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{5 - u^2 - v^2}}, 1 \right),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_\gamma \big(2xyz^3 + 2yz^2\big)\, dx + \big(xz^2 + x^2z^3\big)\, dy + \big(2xyz + 3x^2yz^2\big)\, dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_Y \left(\nabla \times (2xyz^3 + 2yz^2, xz^2 + x^2z^3, 2xyz + 3x^2yz^2)\right) \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_Y (0, 2yz, -z^2) \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{(u-1)^2+v^2 \le 1} \left((0, 2v\sqrt{5-u^2-v^2}, -\left(5-u^2-v^2\right)\right) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{5-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{5-u^2-v^2}}, 1\right) dudv =$$

$$= \iint_{(u-1)^2+v^2 \le 1} \left(2v^2 - (5-u^2-v^2)\right) dudv = \iint_{(u-1)^2+v^2 \le 1} \left(u^2 + 3v^2 - 5\right) dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u-1$, $t = v \iff u = s+1$, $v = t$,
substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left((s+1)^2 + 3t^2 - 5\right) |1|\, dsdt = \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left(s^2 + 2s + 3t^2 - 4\right) dsdt =$$

(Eftersom $2s$ är udda i s och området $s^2 + t^2 \le 1$ är symmetriskt kring $s = 0$)

$$= \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left(s^2 + 3t^2 - 4\right) dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \le 2$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left(\frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right) + 3 \cdot \frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right) - 4\right) dsdt = 2 \iint_{s^2+t^2 \le} (s^2 + t^2 - 2)\, dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= 2 \iint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \left(r^2 - 2\right) r\, drd\theta = 4\pi \int_0^1 \left(r^3 - 2r\right) dr = 4\pi \left[\frac{1}{4}r^4 - r^2\right]_0^1 = -3\pi.$$

5. Låt kurvan γ' vara ett varv moturs längs den kvadratiska kurvan med kvadrathörnen i de fyra punkterna $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$, och låt kurvan γ'' vara ett varv moturs längs cirkeln $x^2 + y^2 = 16$. Sätt

$$P(x,y) = -\frac{\cos x\, \sin y}{\sin^2 x + \sin^2 y} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{\sin x\, \cos y}{\sin^2 x + \sin^2 y}.$$

Låt D vara hela planet utom de punkter (x,y) där $\sin x = \sin y = 0$, dvs D är hela planet utom punkterna $(m\pi, n\pi)$, $m, n \in \mathbf{Z}$. Funktionerna P och Q och alla deras derivator existerar då och är kontinuerliga i hela D. Vi ska beräkna $\int_{\gamma'} P\, dx + Q\, dy$ och $\int_{\gamma''} P\, dx + Q\, dy$.

Vi börjar med att beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma'} P\, dx + Q\, dy$. Låt γ_1 vara räta linjen från punkten $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ till punkten $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, låt γ_2 vara räta linjen från punkten $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ till punkten $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, låt γ_3 vara räta linjen från punkten $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ till punkten $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, och låt γ_4 vara räta linjen från punkten $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ till punkten $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Då är $\gamma' = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3) \cup \gamma_4$. En parametrisering av γ_1 är $x = \frac{\pi}{2}$, $y = t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, en parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, en parametrisering av γ_3 är $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, och en parametrisering av γ_4 är $x = t$, $y = -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Vi får att

$$\int_{\gamma'} P\, dx + Q\, dy = \int_{\gamma_1} P\, dx + Q\, dy + \int_{-\gamma_2} P\, dx + Q\, dy + \int_{-\gamma_3} P\, dx + Q\, dy + \int_{\gamma_4} P\, dx + Q\, dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} P\, dx + Q\, dy - \int_{\gamma_2} P\, dx + Q\, dy - \int_{\gamma_3} P\, dx + Q\, dy + \int_{\gamma_4} P\, dx + Q\, dy =$$

(Enligt de angivna parametriseringarna av γ_1, γ_2, γ_3 och γ_4.)

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(0 + \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos t}{\sin^2\frac{\pi}{2} + \sin^2 t} \right) dt - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{\cos t \sin\frac{\pi}{2}}{\sin^2 t + \sin^2\frac{\pi}{2}} + 0 \right) dt$$

$$- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(0 + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos t}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2 t} \right) dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{\cos t \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 t + \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + 0 \right) dt =$$

$$= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}\, dt = 4 \Big[\arctan(\sin t) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\left(\arctan 1 - \arctan(-1)\right) = 4 \arctan 1 = 2\pi.$$

Vi beräknar nu den andra kurvintegralen $\int_{\gamma''} P\,dx + Q\,dy$. Derivering ger att

$$P_2'(x,y) = Q_1'(x,y) = \frac{\cos x \cos y \left(\sin^2 y - \sin^2 x\right)}{\left(\sin^2 x + \sin^2 y\right)} \quad \text{då } (x,y) \in D.$$

I delområden av planet där Greens formel kan användas på vektorfältet (P,Q), dvs i delområden av området D, försvinner således dubbelintegraldelen i Greens formel. Vi utnyttjar detta för att beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma''} P\,dx + Q\,dy$. Fem av punkterna $(m\pi, n\pi)$, $m, n \in \mathbf{Z}$, de punkter där P och Q inte är definierade, ligger innanför kurvan γ'', och det är punkterna $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (\pi, 0)$, $A_3 = (0,\pi)$, $A_4 = (-\pi, 0)$ och $A_5 = (0, -\pi)$. Omge var och en av dessa fem punkter A_k med en cirkel med liten radie a och medelpunkt i punkten. Låt Γ_k $(k = 1,2,3,4,5)$ vara cirkeln kring A_k genomlupen ett varv moturs. Cirklarnas radie a väljs så liten att cirklarna Γ_k $(k = 1,2,3,4,5)$ är disjunkta och ligger innanför cirkeln γ'', och också så liten att Γ_1 ligger innanför kadratkurvan γ'. Dvs $0 < a < 4 - \pi$ gäller. Låt E vara den del av området innanför cirkeln γ'' som är utanför cirklarna Γ_k $(k = 1,2,3,4,5)$, samt låt F vara den del av området innanför kvadratkurvan γ' som är utanför cirkeln Γ_1. Då gäller att $E \cup \partial E \subset D$ och att $F \cup \partial F \subset D$. Vi kan alltså tillämpa Greens formel på vektorfältet (P,Q) i området $E \cup \partial E$ och i området $F \cup \partial F$ och få att

$$\int_{\gamma''} P\,dx + Q\,dy + \sum_{k=1}^{5} \int_{-\Gamma_k} P\,dx + Q\,dy = \iint_E \left(Q_1'(x,y) - P_2'(x,y)\right) dxdy = \iint_E 0\ dxdy = 0$$

och att

$$\int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy + \int_{-\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_F \left(Q_1'(x,y) - P_2'(x,y)\right) dxdy = \iint_F 0\ dxdy = 0,$$

och eftersom $\int_{-\Gamma} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ och $\int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy = 2\pi$ följer av detta att

$$\int_{\gamma''} P\,dx + Q\,dy = \sum_{k=1}^{5} \int_{\Gamma_k} P\,dx + Q\,dy \tag{4}$$

och att

$$\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = 2\pi. \tag{5}$$

Låt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t < \beta$ vara en parametrisering av cirkeln Γ_1. (En sådan parametrisering fås t ex om $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = a \sin t$, $\alpha = 0$ och $\beta = 2\pi$.) Då är $x = \pi + \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t < \beta$ en parametrisering av cirkeln Γ_2. Dessa parametriseringar ger

$$\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(-\frac{\cos\varphi(t)\ \sin\psi(t)}{\sin^2\varphi(t) + \sin^2\psi(t)} \varphi'(t) + \frac{\sin\varphi(t)\ \cos\psi(t)}{\sin^2\varphi(t) + \sin^2\psi(t)} \psi'(t) \right) dt$$

och

$$\int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \left(-\frac{\cos(\pi+\varphi(t))\,\sin\psi(t)}{\sin^2(\pi+\varphi(t)) + \sin^2\psi(t)}\varphi'(t) + \frac{\sin(\pi+\varphi(t))\,\cos\psi(t)}{\sin^2(\pi+\varphi(t)) + \sin^2\psi(t)}\psi'(t) \right) dt =$$

$$= -\int_\alpha^\beta \left(-\frac{\cos\varphi(t)\,\sin\psi(t)}{\sin^2\varphi(t) + \sin^2\psi(t)}\varphi'(t) + \frac{\sin\varphi(t)\,\cos\psi(t)}{\sin^2\varphi(t) + \sin^2\psi(t)}\psi'(t) \right) dt.$$

Dvs vi har att

$$\int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy. \tag{6}$$

På likartat sätt kan motiveras att vi även har att

$$\int_{\Gamma_k} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy \quad \text{för } k = 3, 4, 5. \tag{7}$$

Av (4), (5), (6) och (7) följer att

$$\int_{\gamma''} P\,dx + Q\,dy = -6\pi.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.