MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
050825

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Konvergerar eller divergerar den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\,dx$? 3 p

   b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $x^2y'' - (x^3 + x)y' + y = 0$ med bivillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 3 p

2. Betrakta kurvan $(x + y)^3 = xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   a) Visa att för varje fixt $t > 0$ har räta linjen $y = tx$, den räta linje som går genom origo och har lutning t, och den betraktade kurvan exakt en skärningspunkt i $x > 0$, $y > 0$, och det är punkten $(x, y) = \left(\frac{t}{(1+t)^3}, \frac{t^2}{(1+t)^3}\right)$. 1 p

   Om $(x, y) = \left(\frac{t}{(1+t)^3}, \frac{t^2}{(1+t)^3}\right)$ gäller att $(x, y) \to (0, 0)$ då $t \to 0^+$ och då $t \to \infty$. Det följer därför av a) att den betraktade kurvan är en enkel sluten kurva och att $(x, y) = \left(\frac{t}{(1+t)^3}, \frac{t^2}{(1+t)^3}\right)$, $0 \leq t < \infty$ är en parameterframställning av kurvan.

   b) Bestäm arean av det område som den betraktade enkla slutna kurvan omsluter. 3 p

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $x^2 + y^2 = 1$ där $z \geq 0$ och $z \leq 2 + x$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$. 4 p

4. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ där D är området $2x^2 + y^2 \leq 1 + z^2$, $z \geq 0$, $z \leq 2 + x$. 4 p

5. Betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma -y\,dx - 2xz\,dy + (-xy + y)\,dz$$
   när γ är en enkel sluten kurva belägen på ytan $z = x^2 + y^2$ och och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Visa att kurvintegralen har ett största värde för en viss sådan kurva γ. Ange också detta största värde, samt ange på parameterform en ekvation för den kurva γ för vilken detta största värde antas. 4 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent. 6 p

7. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Antag att

   (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$
   (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

   Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} a_k$ då är konvergent och att seriens summa s uppfyller att $0 \leq s \leq a_1$. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning xx kl xx i rum 328 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.