Lösningar till Matematisk analys 4, 050825

1. a) Den givna generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

är generaliserad på två sätt, dels genom att integranden är obegränsad då $x \to 0^+$, och dels genom att övre integrationsgränsen är ∞. Vi studerar dessa båda generaliseringar var för sig genom att dela upp det givna integrationsintervallet i två delar och var för sig studera

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx\,. \tag{1}$$

Notera att eftersom

$$\sin\frac{1}{x} > 0 \quad \text{i} \quad x > \frac{1}{\pi}$$

och $1 > \frac{1}{\pi}$ är den andra generaliserade integralen i (1) en positiv generaliserad integral.

Integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx$:

Denna generaliserade integral är generaliserad enbart genom att integranden är obegränsad då $x \to 0^+$. Det finns inget intervall av typen $]0, a]$, där $a > 0$, i vilket integranden har konstant tecken. Vi kan därför inte använda jämförelsekriterier för positiva generaliserade integraler direkt på denna generaliserade integral, men vi kan göra såhär. Det gäller att

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{för alla } x > 0. \tag{2}$$

Vidare gäller att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{är konvergent (positiv generaliserad standardintegral).} \tag{3}$$

Av (2), (3) och jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\right| dx \quad \text{är konvergent.} \tag{4}$$

Eftersom absolutkonvergens medför konvergens följer sedan av (4) att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx \quad \text{är konvergent.}$$

Integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx$:

Denna generaliserade integral är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. Integralen är också positiv som noterats ovan. Vi har att

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x} \Big/ \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to 1 \quad \text{då } x \to \infty$$

enligt standardgränsvärdet

$$\frac{\sin u}{u} \to 1 \quad \text{då} \quad u \to 0,$$

och eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

är konvergent (standardintegral), är också

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\,dx$$

konvergent enligt jämförelsekriterium för för positiva generaliserade integraler.

Båda generaliserade integralerna i (1) är således konvergenta och alltså är den givna geraliserade integralen konvergent.

b) Eftersom $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ kan den sökta potensserielösningen skrivas

$$y = x + \sum_{k=2}^\infty a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = 1 + \sum_{k=2}^\infty k a_k x^{k-1} \quad \text{och att} \quad y'' = \sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2}.$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$x^2\sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2} - (x^3+x)\left(1 + \sum_{k=2}^\infty k a_k x^{k-1}\right) + x + \sum_{k=2}^\infty a_k x^k = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$x^2\sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2} - x^3\sum_{k=2}^\infty k a_k x^{k-1} - x\sum_{k=2}^\infty k a_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^\infty a_k x^k - x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=2}^\infty k a_k x^{k+2} - \sum_{k=2}^\infty k a_k x^k + \sum_{k=2}^\infty a_k x^k - x^3 = 0. \tag{5}$$

Men

$$\underbrace{\sum_{k=2}^\infty k a_k x^{k+2}}_{\text{Sätt } \ell = k+2} = \underbrace{\sum_{\ell=4}^\infty (\ell-2)a_{\ell-2}x^\ell}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=4}^\infty (k-2)a_{k-2}x^k,$$

som insatt i (5) ger att

$$\sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=4}^\infty (k-2)a_{k-2}x^k - \sum_{k=2}^\infty k a_k x^k + \sum_{k=2}^\infty a_k x^k - x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^\infty \big(k(k-1) - k + 1\big)a_k x^k - \sum_{k=4}^\infty (k-2)a_{k-2}x^k - x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^\infty (k-1)^2 a_k x^k - \sum_{k=4}^\infty (k-2)a_{k-2}x^k - x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$a_2x^2 + 4a_3x^3 + \sum_{k=4}^{\infty}(k-1)^2 a_k x^k - \sum_{k=4}^{\infty}(k-2)a_{k-2}x^k - x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$a_2x^2 + (4a_3 - 1)x^3 + \sum_{k=4}^{\infty}\big((k-1)^2 a_k - (k-2)a_{k-2}\big)x^k = 0.$$

Vi får således att

$$(k-1)^2 a_k - (k-2)a_{k-2} = 0, \ \ k = 4, 5, \dots$$

samt att

$$a_2 = 4a_3 - 1 = 0,$$

och alltså att

(6)
$$a_k = \frac{k-2}{(k-1)^2}a_{k-2}, \ \ k = 4, 5, \dots$$

samt att

$$a_2 = 0, \ \ a_3 = \frac{1}{4}.$$

Av $a_2 = 0$ och (6) följer att

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0,$$

dvs att

$$a_{2k} = 0 \text{ för } k = 1, 2, \dots .$$

Av $a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ och (6) följer att

$$\begin{aligned}
a_5 &= \frac{3}{4^2}a_3 = \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}\,,\\
a_7 &= \frac{5}{6^2}a_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\,,\\
a_9 &= \frac{7}{8^2}a_6 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\,,\\
&\ \ \vdots\,,
\end{aligned}$$

dvs att

$$a_{2k+1} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2k)^2} \quad \text{för } k = 2, 3, \dots .$$

Den sökta potensserielösningen är alltså

(7)
$$y = x + \frac{1}{4}x^3 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2k)^2}x^{2k+1}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2k)^2}x^{2k+1} \quad \text{för } k = 2, 3, \dots .$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2k+2)^2}|x|^{2k+3}\cdot \frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2k)^2}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}\frac{1}{|x|^{2k+1}} =$$

$$= \frac{2k+1}{(2k+2)^2}|x|^2 \to 0 \quad \text{då } k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium är således den erhållna potensserielösningen (7) absolutkonvergent för godtyckligt $x \neq 0$. Den erhållna potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för varje

$x \in \mathbf{R}$, och följdaktligen är dess konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är således lösning till den givna differentialekvationen på hela räta linjen.)

Anmärkning. Vi har att

$$a_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{2^3 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot (2k)^3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{2^{3k} \cdot 1^3 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot (k)^3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{2^{3k}(\cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k)^3} = \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^3} \quad \text{för } k = 2, 3, \ldots .$$

Noterar vidare att slutformeln ovan för a_{2k+1} också stämmer för $k = 1$. Den erhållna potensserielösningen (7) kan alltså även skrivas

$$y = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^3} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^3} x^{2k+1}.$$

2. a) Insättning av $y = tx$ i $(x+y)^3 = xy$ ger $(1+t)^3 x^3 = tx^2 \Leftrightarrow x^2\big((1+t)^3 x - t\big) = 0$, en ekvation som för varje fixt $t > 0$ har exakt en positiv lösning, nämligen

$$x = \frac{t}{(1+t)^3}. \tag{8}$$

Av (8) och $y = tx$ fås

$$y = \frac{t^2}{(1+t)^3},$$

och a) följer.

b) Då t växer från 0 till ∞ roterar räta linjen $y = tx$ moturs kring origo. Den erhållna parametriseringen av den givna enkla slutna kurvan genomlöper således kurvan moturs. Låt γ vara den givna enkla slutna kurvan genomlupen moturs, och låt D vara det område som γ omsluter. Arean av D kan fås med en lämplig kurvintegral längs γ. Vi har t ex att

$$\int_\gamma -y\,dx = \iint_D dxdy = \text{area}(D). \tag{9}$$

Första likheten i (9) följer av Greens formel och av att γ:s omloppsriktning är moturs, och andra likheten i (9) är ett samband mellan dubbelintegral och area. Den erhållna parametriseringen av γ ger vidare att

$$\int_\gamma -y\,dx = \int_0^\infty -\frac{t^2}{(1+t)^3}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(1+t)^3}\right)\right) dt = \tag{10}$$

$$= \int_0^\infty -\frac{t^2}{(1+t)^3}\frac{1-2t}{(1+t)^4}\,dt = \int_0^\infty \frac{2t^3 - t^2}{(1+t)^7}\,dt =$$

(Sätt $u = 1 + t \Leftrightarrow t = u - 1$. Då är $\frac{dt}{du} = 1$, $dt = du$, samt $t = 0$ ger $u = 1$ och $t \to \infty$ ger $u \to \infty$.)

$$= \int_1^\infty \frac{2(u-1)^3 - (u-1)^2}{u^7}\,du = \int_1^\infty \frac{2(u^3 - 3u^2 + 3u - 1) - (u^2 - 2u + 1)}{u^7}\,du =$$

$$= \int_1^\infty \frac{2u^3 - 7u^2 + 8u - 3}{u^7}\,du = \int_1^\infty \left(2u^{-4} - 7u^{-5} + 8u^{-6} - 3u^{-7}\right) du =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}u^{-3} + \frac{7}{4}u^{-4} - \frac{8}{5}u^{-5} + \frac{1}{2}u^{-6}\right]_1^{\infty} = \frac{2}{3} - \frac{7}{4} + \frac{8}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{60}.$$

Av (9) och (10) fås att den sökta arean

$$\text{area}(D) = \frac{1}{60}.$$

3. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 0$ där $x^2 + y^2 \leq 1$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 2 + x$ där $x^2 + y^2 \leq 1$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_k$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_k, $k = 1, 2$, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\text{(11)} \qquad \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz.$$

På Y_1 är $z = 0$ och $\mathbf{N}_1 = (0, 0, -1)$. Dvs $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = (x^2, y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ på hela Y_1, och alltså är

$$\text{(12)} \qquad \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = 0.$$

En parametrisering av Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 2 + u$, $u^2 + v^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r} = (u, v, 2 + u)$ får vi att $\mathbf{r}'_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{r}'_2 = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2 = (-1, 0, 1)$. Eftersom ytnormalen $\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2$ till Y_2 pekar uppåt (har positiv z-komponent) i den införda parametriseringen, och alltså är utåtriktad i förhållande till D, får vi att

$$\text{(13)} \qquad \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iint_{Y_2} (x^2, y^2, z^2) \cdot \mathbf{N}_2\, dS = + \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \big(u^2, v^2, (2 + u)^2\big) \cdot (-1, 0, 1)\, dudv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \big(-u^2 + (2 + u)^2\big)\, dudv = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (4 + 4u)\, dudv =$$

(eftersom $4u$ är udda i u och området $u^2 + v^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $u = 0$)

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 4\, dudv = 4 \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dudv = 4\, \text{area}(u^2 + v^2 \leq 1) = 4\pi.$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2y + 2z$ och D är mängden $0 \leq z \leq 2 + x$, $x^2 + y^2 \leq 1$, och alltså är

$$\text{(14)} \qquad \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_D (2x + 2y + 2z)\, dxdydz =$$

(eftersom planet $z = 2 + x$ skär xy-planet längs räta linjen $x = -2$,
och räta linjen $x = -2$ ligger utanför cirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$ i xy-planet)

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_0^{2+x} (2x + 2y + 2z)\, dz\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\Big[2xz + 2yz + z^2\Big]_{z=0}^{z=2+x}\right) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \big(2x(2 + x) + 2y(2 + x) + (2 + x)^2\big)\, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \big(4 + 8x + 4y + 2xy + 3x^2\big)\, dxdy =$$

(eftersom $8x + 2xy$ är udda i x och området $x^2 + y^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $x = 0$)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(4 + 4y + 3x^2\right) \, dxdy =$$

(eftersom $4y$ är udda i y och området $x^2 + y^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $y = 0$)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(4 + 3x^2\right) \, dxdy =$$

(eftersom området $x^2 + y^2 \leq 1$ är symmetriskt i x och y)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(4 + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right) \, dxdy =$$

(inför polära koordinater, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$= \iint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} \left(4 + \frac{3}{2}r^2\right) r \, drd\theta = \iint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} \left(4r + \frac{3}{2}r^3\right) \, drd\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(4r + \frac{3}{2}r^3\right) \, dr = 2\pi \left[2r^2 + \frac{3}{8}r^4\right]_0^1 = \frac{19\pi}{4}$$

Insättning av (12), (13) och (14) i (11) ger att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} \, dS = \frac{19\pi}{4} - 4\pi = \frac{3\pi}{4}$$

4. Vi bestämmer först skärningen mellan planet $z = 2 + x$ och ytan $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$. Sambandet $z = 2 + x$ från planet ger insatt i ytans ekvation att $2x^2 + y^2 = 1 + (2 + x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9$. Skärningen mellan planet $z = 2 + x$ och ytan $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ är alltså cirkeln bestående av alla (x, y, z) sådana att $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ och $z = 2 + x$. Skärningen mellan planet $z = 0$ och ytan $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ är ellipsen $2x^2 + y^2 = 1$ i xy-planet. Cirkeln $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ ligger helt utanför ellipsen $2x^2 + y^2 = 1$ i xy-planet. Av $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ och $z \geq 0$ fås $z = \sqrt{2x^2 + y^2 - 1}$. Området D kan därför delas upp i följande två delområden (rita figur):

   D_1 bestående av alla (x, y, z) sådana att $2x^2 + y^2 < 1$ och $0 \leq z \leq 2 + x$,

   D_2 bestående av alla (x, y, z) sådana att $(x, y) \in E$ och $\sqrt{2x^2 + 3y^2 - 1} \leq z \leq 2+x$, där E är området i xy-planet mellan ellipsen $2x^2 + y^2 = 1$ och cirkeln $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

   Vi får att

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D_1} z \, dx \, dy \, dz + \iiint_{D_2} z \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iint_{2x^2+y^2<1} \left(\int_0^{2+x} z \, dx\right) dx \, dy + \iint_E \left(\int_{\sqrt{2x^2+y^2-1}}^{2+x} z \, dx\right) dx \, dy =$$

$$= \iint_{2x^2+y^2<1} \left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=2+x}\right) dx \, dy + \iint_E \left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=\sqrt{2x^2+y^2-1}}^{z=2+x}\right) dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{2x^2+y^2<1} (4 + 4x + x^2) \, dx \, dy + \frac{1}{2}\iint_E (5 + 4x - x^2 - y^2) \, dx \, dy =$$

(Eftersom E i xy-planet är området mellan ellipsen $2x^2+y^2=1$ och cirkeln $(x-2)^2+y^2=9$, och cirkeln $(x-2)^2+y^2=9$ helt ligger utanför ellipsen $2x^2+y^2=1$.)

$$= \frac{1}{2}\iint_{2x^2+y^2<1}(4+4x+x^2)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_{(x-2)^2+y^2\le 9}(5+4x-x^2-y^2)\,dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{2x^2+y^2<1}(5+4x-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{2x^2+y^2<1}(2x^2+y^2-1)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_{(x-2)^2+y^2\le 9}(5+4x-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

(Gör substitutionen $u=\sqrt{2}x$, $v=y$, dvs $x=\frac{1}{\sqrt{2}}u$, $y=v$ i den första integralen, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Gör substitutionen $u=x-2$, $v=y$, dvs $x=2+u$, $y=v$ i den andra integralen, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}=1$.)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\iint_{u^2+v^2<1}(u^2+v^2-1)\,du\,dv + \frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\le 9}(9-u^2-v^2)\,du\,dv =$$

(Övergå till polära koordinater i båda integralerna.)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}}(r^2-1)r\,dr\,d\theta + \frac{1}{2}\iint_{\substack{0\le r\le 3\\ 0\le\theta\le 2\pi}}(9-r^2)r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (r^3-r)\,dr + \pi\int_0^3 (9r-r^3)\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{2}r^2)\right]_0^1 + \pi\left[\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4)\right]_0^3 = \frac{\pi}{8}(162-\sqrt{2}).$$

5. Låt σ vara den del av ytan $z=x^2+y^2$ som ligger innanför kurvan γ, låt D vara projektionen av σ på xy-planet, och låt $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till σ. En parametrisering av σ är $x=u$, $y=v$, $z=u^2+v^2$, $(u,v)\in D$. Med $\mathbf{r}=(u,v,u^2+v^2)$ har vi att $\mathbf{r}_1'=(1,0,2u)$, $\mathbf{r}_2'=(0,1,2v)$ och $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'=(-2u,-2v,1)$ och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_\gamma -y\,dx-2xz\,dy+(-xy+y)\,dz$$

(enligt Stokes sats)

$$= \iint_\sigma \big(\nabla\times(-y,-2xz,-xy+y)\big)\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

$$= \iint_\sigma x+1,y,-2z+1)\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

(enligt den införda parametriseringen av σ)

$$= + \iint_D (u+1, v, -2u^2 - 2v^2 + 1) \cdot (-2u, -2v, 1)\, dudv =$$

$$= \iint_D \left(1 - 4u^2 - 2u - 4v^2\right) dudv.$$

Men

$$1 - 4u^2 - 2u - 4v^2 = -(-1 + 4u^2 + 2u + 4v^2) =$$

$$-\left(-1 + 4\left(u^2 + \frac{1}{2}u\right) + 4v^2\right) = -\left(-1 + 4\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 4v^2\right) =$$

$$= \frac{5}{4} - 4\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - 4v^2.$$

Det följer att

$$\int_\gamma -y\, dx - 2xz\, dy + (-xy + y)\, dz = \iint_D \left(\frac{5}{4} - 4\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - 4v^2\right) dudv.$$

Eftersom γ är en godtycklig enkel sluten positivt orienterad kurva på ytan $z = x^2 + y^2$ är den ovan införda mängden D en godtycklig begränsad öppen enkelt sammanhängande delmängd av planet. (Med kurva i samband med kurvintegraler menas en kurva som har en parameterframställning som är styckvis C^1. Mängden D förutsätts därför även vara sådan att dess rand är en sådan styckvis-C^1-kurva. Även nedan förutsätts D ha denna egenskap.) Av ovanstående resonemang och räkningar följer att det givna problemet är ekvivalent med att visa att dubbelintegralen

$$\iint_D \left(\frac{5}{4} - 4\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - 4v^2\right) dudv \tag{15}$$

har ett största värde då D varierar över alla begränsade öppna enkelt sammanhängande delmängder av planet. Men dubbelintegralen (15) blir uppenbarligen maximal då D är mängden

$$\frac{5}{4} - 4\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - 4v^2 > 0 \iff \left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 < \frac{5}{16}, \tag{16}$$

en mängd som är en begränsad öppen enkelt sammanhängande delmängd av planet (mängden är en cirkelskiva). Dubbelintegralen (15) har således ett största värde då D varierar över alla begränsade öppna enkelt sammanhängande delmängder av uv-planet, och största värdet antas då D är mängden(16). För att beräkna största värdet gör vi variabelsubstitutionen

$$s = u + \frac{1}{4}, \quad t = v \iff u = s - \frac{1}{4}, \quad v = t.$$

Substitutionens funktionaldeterminant

$$\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1.$$

Efter gjord variabelsubstitution får vi således att det sökta största värdet =

$$\iint_{s^2+t^2 \leq 5/16} \left(\frac{5}{4} - 4\left(s^2 + t^2\right)\right) dsdt =$$

Övergång till polära koordinater ger sedan dubbelintegralen

$$\iint_{\substack{0 \leq \rho \leq \sqrt{5}/4 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \left(\frac{5}{4} - 4\rho^2\right) \rho\, d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{5}/4} \left(\frac{5}{4}\rho - 4\rho^3\right) d\rho = 2\pi \left[\frac{5}{8}\rho^2 - \rho^4\right]_0^{\sqrt{5}/4} d\rho = \frac{25\pi}{128},$$

vilket alltså är det sökta största värdet. Randkurvan till mängden (16) är cirkeln

$$\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \frac{5}{16}$$

och

$$u + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}\cos t, \quad v = \frac{\sqrt{5}}{4}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \quad \Longleftrightarrow$$

$$u = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\cos t, \quad v = \frac{\sqrt{5}}{4}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{17}$$

är en parameterframställning av denna randkurva med positiv omloppsriktning. Den kurva γ som maximerar den givna kurvintegralen är den kurva som fås ur (17) och ur $x = u$, $y = v$ och $z = u^2 + v^2$, dvs

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\cos t, \quad y = \frac{\sqrt{5}}{4}\sin t, \quad z = \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\cos t\right)^2 + \frac{5}{16}\sin^2 t, \quad 0 \le t \le 2\pi \quad \Longleftrightarrow$$

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\cos t, \quad y = \frac{\sqrt{5}}{4}\sin t, \quad z = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\cos t \quad 0 \le t \le 2\pi$$

är en parameterframställning av den maximerande kurvan.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.