MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
051222

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Avgör för var och en av de båda generaliserade integralerna $\int_0^\infty \sin(e^{-x})\,dx$ och $\int_0^\infty \sin(e^{x})\,dx$ om integralen är konvergent eller ej. 3 p

   b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y''' + 4x^2y' + 12xy = 0$ med bivillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = y''(0) = 0$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 3 p

2. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ där D är området $z \geq 1-2x$, $z \leq 1+x$, $x^2+y^2 \leq 2$. 4 p

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma 3x^2y^5\,dx + \left(3xz + 5x^3y^4\right)\,dy + \left(2xy + z^9\right)\,dz$, där γ är skärningskurvan mellan cylinderytan $2x^2 + y^2 = 1$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$, och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. 4 p

4. a) Motivera först att vektorn (x, y, z) är en utåtriktad normalvektor till klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ i en punkt (x, y, z) på ytan. Visa sedan att om Y är en del av klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$, och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ samt $\mathbf{F} = (x, y, z)$, så är $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = a\,\mathrm{area}(Y)$. 2 p

   b) Låt γ vara en enkel sluten kurva på begränsningsytan till klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ $(a > 0)$, och låt σ vara den yta som räta linjerna mellan klotets medelpunkt och punkterna på γ tillsammans bildar. Låt Y vara den del av klotets begränsningsyta som ligger innanför γ, och låt D vara den del av klotet som ligger innanför σ. Visa att $\mathrm{vol}(D) = \frac{1}{3}a\ \mathrm{area}(Y)$, förslagsvis genom att studera $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$ där $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till D:s begränsningsyta ∂D och $\mathbf{F} = (x, y, z)$. 2 p

5. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{y}{(x+z)^2+y^2}, -\frac{x+z}{(x+z)^2+y^2}, \frac{y}{(x+z)^2+y^2}\right).$$

   a) Visa att rotationen av $\mathbf{F}$ är $\mathbf{0}$ i det område där $\mathbf{F}$ är definierat. 2 p

   b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ där γ är kurvan $(2x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1$, $z = x$, $x \geq 0$ från punkten $(0, -1, 0)$ till punkten $(0, 1, 0)$. 2 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Antag att

   (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$
   (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

   Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ då är konvergent och att seriens summa s uppfyller att $0 \leq s \leq a_1$. 6 p

7. (Satsen om en potensseries konvergensradie.) Visa att för en potensserie kring 0 i variabeln x gäller något av följande tre alternativ.

   (i) Potensserien konvergerar enbart för $x = 0$.
   (ii) Det finns ett tal $r > 0$ sådant att potensserien är absolutkonvergent om $|x| < r$ och divergent om $|x| > r$.
   (iii) Potensserien är absolutkonvergent för alla x.

   6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning fr 23/12 kl 11.00-11.15 i sal 15 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.