Lösningar till Matematisk analys 4, 051222

1. a) *Den generaliserade integralen* $\displaystyle\int_0^\infty \sin(e^{-x})\,dx$ *:*

   Den är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. Gör substitutionen $u = e^{-x}$. Då är $x = -\ln u$, $\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u}$, $dx = -\frac{1}{u}\,du$, $x = 0$ ger $u = 1$, $x \to \infty$ ger $u \to 0$, och vi får att

   $$\int_0^\infty \sin(e^{-x})\,dx = \int_1^0 (\sin u)\left(-\frac{1}{u}\right)\,du = \int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du. \tag{1}$$

   Enligt ett standardgänsvärde gäller att

   $$\frac{\sin u}{u} \to 1 \quad \text{då} \quad u \to 0. \tag{2}$$

   Definiera funktionen $f(u)$ på $0 \le u \le 1$ genom att sätta $f(0) = 1$ och $f(u) = \frac{\sin u}{u}$ om $0 < u \le 1$. Då gäller att

   $$\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^1 f(u)\,du, \tag{3}$$

   och eftersom $f(u)$ är kontinuerlig i $0 \le u \le 1$ (även kontinuerlig i $u = 0$ enligt (2)) gäller även att

   $$\int_0^1 f(u)\,du \quad \text{är en väldefinierad ej generaliserad Riemannintegral.} \tag{4}$$

   Av (1), (3) och (4) följer att

   $$\int_0^\infty \sin(e^{-x})\,dx$$

   är konvergent.

   Alternativt kan man göra såhär: Vi har att

   $$\frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} \to 1 \in\,]0,\infty[\quad \text{då} \quad x \to \infty$$

   enligt standardgränsvärdet (2) ovan. Vidare är den generaliserade integralen $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ konvergent eftersom

   $$\int_0^T e^{-x}\,dx = \left[e^{-x}\right]_0^T = 1 - e^{-T} \to 1 \ = \ \text{ändligt tal} \quad \text{då} \quad T \to \infty.$$

   Dessa fakta och jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler visar att

   $$\int_0^\infty \sin(e^{-x})\,dx$$

   är konvergent.

Den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx:$

Den är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. Gör substitutionen $u = e^x$. Då är $x = \ln u$, $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$, $dx = \frac{1}{u}\,du$, $x = 0$ ger $u = 1$, $x \to \infty$ ger $u \to \infty$, och vi får att

$$\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx = \int_1^\infty (\sin u)\,\frac{1}{u}\,du = \int_1^\infty \frac{\sin u}{u}\,du. \tag{5}$$

Partiell integration ger att

$$\int_1^T \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^T (\sin u)\,\frac{1}{u}\,du = \left[(-\cos u)\,\frac{1}{u}\right]_0^T - \int_1^T (-\cos u)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du =$$

$$= \cos 1 - \frac{\cos T}{T} - \int_1^T \frac{\cos u}{u^2}\,du,$$

och eftersom $\frac{\cos T}{T} \to 0$ då $T \to \infty$ följer att

$$\int_1^T \frac{\sin u}{u}\,du \text{ har ändligt gränsvärde då } T \to \infty \iff \int_1^T \frac{\cos u}{u^2}\,du \text{ har ändligt gränsvärde då } T \to \infty,$$

och följdaktligen gäller att

$$\int_1^\infty \frac{\sin u}{u}\,du \quad \text{är konvergent} \quad \iff \quad \int_1^\infty \frac{\cos u}{u^2}\,du \quad \text{är konvergent.} \tag{6}$$

Det gäller vidare att

$$\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \le \frac{1}{u^2} \quad \text{för alla} \quad u \ge 1 \tag{7}$$

och att

$$\int_1^\infty \frac{1}{u^2}\,du \quad \text{är konvergent generaliserad standardintegral.} \tag{8}$$

Av (7), (8) och jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos u}{u^2}\right|\,du$$

är konvergent, och eftersom absolutkonvergens medför konvergens fås sedan att

$$\int_1^\infty \frac{\cos u}{u^2}\,du$$

är konvergent, vilket tillsammans med (5) och (6) visar att

$$\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx$$

är konvergent.

b) Vi ansätter

$$y = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \text{ och } y''' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}.$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} + 4x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 12x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \tag{9}$$

Men

$$4x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 12x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4k a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 12 a_k x^{k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (4k a_k + 12 a_k) x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} 4(k+3) a_k x^{k+1}$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} =$$
$$= \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} = }_{\text{Sätt } \ell = k-4} \underbrace{\sum_{\ell=-1}^{\infty} (\ell+4)(\ell+3)(\ell+2) a_{\ell+4} x^{\ell+1} =}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k}$$
$$= \sum_{k=-1}^{\infty} (k+4)(k+3)(k+2) a_{k+4} x^{k+1} = 6a_3 + \sum_{k=0}^{\infty} (k+4)(k+3)(k+2) a_{k+4} x^{k+1}.$$

Sambandet (9) kan därför skrivas

$$6a_3 + \sum_{k=0}^{\infty} (k+4)(k+3)(k+2) a_{k+4} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 4(k+3) a_k x^{k+1} = 0$$

eller ekvivalent

$$6a_3 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+4)(k+3)(k+2) a_{k+4} + 4(k+3) a_k\big) x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att

$$6a_3 = 0 \quad \text{och} \quad (k+4)(k+3)(k+2) a_{k+4} + 4(k+3) a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \dots$$

och alltså att

$$a_3 = 0 \quad \text{och} \quad a_{k+4} = -\frac{4}{(k+4)(k+2)} a_k \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \dots .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots, \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots \quad \text{och}$$
$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots,$$

samt $y(0) = 1$ och $y'(0) = y''(0) = 0$, får vi vidare att $a_0 = 1$ och $a_1 = a_2 = 0$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \dots$ således att

$$a_{k+4} = -\frac{4}{(k+4)(k+2)} a_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{10}$$

samt

$$a_0 = 1 \quad \text{och} \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Av $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ och $a_3 = 0$ samt (10) följer att

$$a_1 = a_5 = a_9 = \ldots = 0, \quad a_2 = a_6 = a_{10} = \ldots = 0 \quad \text{och} \quad a_3 = a_7 = a_{11} = \ldots = 0$$

dvs att

$$a_{4k+1} = a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Av $a_0 = 1$ och (10) följer att

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{4}{4\cdot 2}\, a_0 = -\frac{1}{2\cdot 1}\, a_0 = -\frac{1}{1\cdot 2}, \\ a_8 &= -\frac{4}{8\cdot 6}\, a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}\, a_4 = (-1)^2 \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \\ a_{12} &= -\frac{4}{12\cdot 10}\, a_8 = -\frac{1}{6\cdot 5}\, a_8 = (-1)^3 \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}, \\ &\vdots, \end{aligned}$$

dvs att

$$a_{4k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Notera här också att formeln för a_{4k} även stämmer för $k = 0$. Den sökta potensserielösningen är alltså

(11)
$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{4k}.$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{4k}$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\begin{aligned} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} &= \frac{1}{\big(2(k+1)\big)!} |x|^{4(k+1)} \cdot (2k)1 \cdot \frac{1}{|x|^{2k}} = \\ &= \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} |x|^4 \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (11) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för alla x, och följdaktligen är potensserielösningens konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen på hela räta linjen. Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$\cos u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} u^{2k}$$

så är den erhållna lösningen $y(x) = \cos(x^2)$.

2. Vi har att $1 - 2x \leq 1 + x \Leftrightarrow x \geq 0$. Låt E vara området $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 2$ i xy-planet. Området D är då tydligen området $(x, y) \in E$, $1 - 2x \leq z \leq 1 + x$. Vi får att

$$\iiint_D (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{(x,y)\in E} \left(\int_{1-2x}^{1+x} (x + y + z)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_{(x,y)\in E} \left(\left[xz + yz + \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=1-2x}^{z=1+x} \right) dx\, dy = \iint_{(x,y)\in E} \left(3x + 3xy + \frac{3}{2} x^2 \right) dx\, dy =$$

(Eftersom $3xy$ är udda i y och området E är symmetriskt kring $y = 0$.)

$$= \iint_{(x,y)\in E} \left(3x + \frac{3}{2}x^2\right) dx\, dy =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{2}\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} \left(3r\cos\theta + \frac{3}{2}r^2\cos^2\theta\right) r\, dr\, d\theta =$$

(Eftersom $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{2}\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} \left(3r^2\cos\theta + \frac{3}{4}r^3 + \frac{3}{4}r^3\cos 2\theta\right) dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3r^2\cos\theta + \frac{3}{4}r^3 + \frac{3}{4}r^3\cos 2\theta\right) d\theta\right) dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[3r^2\sin\theta + \frac{3}{4}r^3\theta + \frac{3}{8}r^3\sin 2\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\right) dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(6r^2 + \frac{3\pi}{4}r^3\right) dr = \left[2r^3 + \frac{3\pi}{16}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}.$$

3. Vi beräknar kurvintegralen genom att använda Stokes sats. Låt Y beteckna den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ där $2x^2 + y^2 \le 1$. En parametrisering av ytan Y är $x = u,\ y = v,\ z = u^2 + v^2,\ 2u^2 + v^2 \le 1$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$ får vi att

$$\mathbf{r}'_1(u,v) = (1,0,2u), \quad \mathbf{r}'_2(u,v) = (0,1,2v) \quad \text{och}$$

$$\mathbf{r}'_1(u,v) \times \mathbf{r}'_2(u,v) = (-2u,-2v,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}'_1(u,v) \times \mathbf{r}'_2(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_\gamma 3x^2y^5\, dx + \left(3xz + 5x^3y^4\right) dy + \left(2xy + z^9\right) dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_Y \left(\nabla \times (3x^2y^5, 3xz + 5x^3y^4, 2xy + z^9)\right) \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_Y (-x,-2y,3z) \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{2u^2+v^2\le 1} \left(-u,-2v,3u^2+3v^2\right) \cdot (-2u,-2v,1)\, dudv =$$

$$= \iint_{2u^2+v^2\le 1} \left(5u^2 + 7v^2\right) dudv =$$

(Gör substitutionen $s = \sqrt{2}u,\ t = v \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}}s,\ v = t$,
substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left(\frac{5}{2}s^2 + 7t^2\right) \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left(\frac{5}{2}s^2 + 7t^2\right) dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \le 2$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \le 1} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right) + 7 \cdot \frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)\right) dsdt = \frac{19\sqrt{2}}{8} \iint_{s^2+t^2 \le} (s^2+t^2)\, dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \frac{19\sqrt{2}}{8} \iint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi}} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{19\pi\sqrt{2}}{4} \int_0^1 r^3\, dr = \frac{19\pi\sqrt{2}}{16}.$$

4. a) I en punkt på en klotyta är vektorn från klotets mitt till punkten en utåriktad normalvektor till klotytan i punkten. I en punkt (x, y, z) på klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ är således vektorn från punkten $(0, 0, 0)$ till punkten (x, y, z), dvs vektorn (x, y, z), en utåtriktad normalvektor till klotytan i punkten (x, y, z) på ytan. Den utåtriktade enhetsnormalvektorn till klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ i punkten (x, y, z) på ytan är således vektorn

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z) = \frac{1}{a}(x, y, z).$$

(Här har vi använt att $x^2+y^2+z^2 = a^2$ om (x, y, z) är en punkt på klotytan $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a > 0)$.) Låt nu Y vara en del av klotytan $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a > 0)$, låt $\mathbf{N}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till $x^2 + y^2 = a^2$ samt sätt $\mathbf{F} = (x, y, 0)$. Vi får då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_Y (x, y, z) \cdot \frac{1}{a}(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint_Y \frac{x^2+y^2+z^2}{a}\, dS = \iint_Y \frac{a^2}{a}\, dS = a \iint_Y dS = a\, \mathrm{area}(Y).$$

(Här har vi igen använt att $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ om (x, y, z) är en punkt på klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.)

b) Ytan ∂D, begränsningsytan till D, består av de båda delytorna σ och Y. I varje punkt på delytan σ är radien genom punkten en del av σ. I varje punkt på delytan σ är alltså $\mathbf{N}$, den utåtriktade enhetsnormalvektorn till ∂D, vinkelrät mot radien genom punkten. Men i varje punkt (x, y, z) på σ är vektorn $\mathbf{F} = (x, y, z)$, vektorn från punkten $(0, 0, 0)$ till punkten (x, y, z), riktad längs radien genom punkten (x, y, z). I varje punkt på σ är således $\mathbf{N}$ vinkelrät mot $\mathbf{F}$, dvs $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$ gäller i varje punkt på σ. Det följer att

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \tag{12}$$

$$= \iint_\sigma 0\, dS + \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = a\, \mathrm{area}(Y).$$

I sista likheten i (12) ovan har vi använt a). Vidare ger divergenssatsen att

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_D 3\, dx\, dy\, dz = 3 \iiint_D dx\, dy\, dz = 3\mathrm{vol}(D). \tag{13}$$

Av (12) och (13) följer att

$$\mathrm{vol}(D) = \frac{1}{3} a\, \mathrm{area}(Y).$$

5. a) Sätt

$$P(x,y,z) = \frac{y}{(x+z)^2+y^2}, \quad Q(x,y,z) = -\frac{x+z}{(x+z)^2+y^2} \quad \text{och} \quad R(x,y,z) = \frac{y}{(x+z)^2+y^2}$$

Då är $F = (P, Q, R)$ och eftersom rotationen av $\mathbf{F}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_1, D_2, D_3) \times (P, Q, R) = \big(R'_2 - Q'_3, -(R'_1 - P'_3), Q'_1 - P'_2\big),$$

och vidare

$$R'_2 - Q'_3 = \frac{1 \cdot \big((x+z)^2+y^2\big) - y \cdot 2y}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} - \left(-\frac{1 \cdot \big((x+z)^2+y^2\big) - (x+z) \cdot 2(x+z)}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2}\right) =$$

$$= \frac{(x+z)^2 - y^2}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} + \frac{y^2 - (x+z)^2}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} = 0,$$

$$R'_1 - P'_3 = -\frac{y \cdot 2(x+z)}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} - \left(-\frac{y \cdot 2(x+z)}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2}\right) = 0,$$

$$Q'_1 - P'_2 = -\left(\frac{1 \cdot \big((x+z)^2+y^2\big) - (x+z) \cdot 2(x+z)}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2}\right) - \frac{1 \cdot \big((x+z)^2+y^2\big) - y \cdot 2y}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} =$$

$$= -\frac{y^2 - (x+z)^2}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} - \frac{(x+z)^2 - y^2}{\big((x+z)^2+y^2\big)^2} = 0,$$

följer att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ överallt där $\mathbf{F}$ är definierat.

b) Vektorfältet $\mathbf{F}$ är definierat överallt där $(x+z)^2+y^2 \neq 0$. Låt D beteckna definitionsmängden för $\mathbf{F}$. Emedan $(x+z)^2+y^2 = 0$ exakt om $z = -x$, $y = 0$ är D mängden av alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ utom de (x,y,z) som ligger på linjen $z = -x$, $y = 0$. Eftersom $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ överallt i D, är kurvintegralen $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ oberoende av vägen i varje öppen enkelt sammanhängande delmängd av D. Vi använder detta för att byta ut γ mot en annan kurva från punkten $(0,-1,0)$ till punkten $(0,1,0)$ längs vilken kurvintegralen lättare kan beräknas. Låt E vara mängden av alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ utom de (x,y,z) som ligger i halvplanet $x+z \leq 0$, $y = 0$. Då är E en öppen enkelt sammanhängande delmägd av D. Låt vidare Γ vara halvcirkelbågen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Då ligger kurvorna γ och Γ båda i E och eftersom båda kurvorna är kurvor från punkten $(0,-1,0)$ till punkten $(0,1,0)$ har kurvintegralen $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ samma värde längs båda kurvorna. På Γ är nämnaren i $\mathbf{F}$, $(x+z)^2+y^2 = (\cos t + 0)^2 + \sin^2 t = 1$ för alla t, vilket gör att kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är enkel att beräkna. Vi får att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{1}(-\sin t) - \frac{\cos t + 0}{1} \cos t + 0\right) dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = -\pi.$$

Anmärkning. Eftersom D inte är en öppen enkelt sammanhängande delmägd av rummet behöver inte kurvintegralen $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ vara oberoende av vägen i D trots att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ i D. I denna uppgift är inte kurvintegralen $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ oberoende av vägen i D. Det följer t ex av att $\int_{\Gamma'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -2\pi \neq 0$ om Γ' är hela cirkeln $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $-\pi \leq t < \pi$ (en sluten kurva), vilket en likartad beräkning som ovan visar.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.