MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
060117

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Bestäm de reella tal x för vilka potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+2+\frac{1}{k+2}\right)x^k$$

konvergerar. Bestäm också potensseriens summa för dessa reella tal x. 3 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $(1-2x^3)y''-6x^2y'+6xy=0$ med bivillkoren $y(0)=1$ och $y'(0)=0$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 3 p

2. a) Låt a och b vara konstanter sådana att $a+3b=0$. För godtyckligt $c>0$ låt γ_c vara kurvan $y=x^3$ från origo till punkten (c,c^3). Visa att kurvintegralen $\int_{\gamma_c} ay\,dx+bx\,dy=0$ för alla $c>0$. 2 p

b) Varje enkel styckvis-C^1-kurva γ i området $0\le y\le x^3$ från en punkt på positiva x-axeln till en punkt på kurvan $y=x^3$, $x>0$ delar området $0\le y\le x^3$ i två delar, en begränsad och en obegränsad del. Låt D_γ beteckna den begränsade delen. Visa att det finns konstanter a och b så att det för varje sådan kurva γ och motsvarande område D_γ gäller att area$\,(D_\gamma)=\int_\gamma ay\,dx+bx\,dy$. Ange också sådana konstanter a och b. 2 p

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av klotytan $x^2+y^2+z^2=4$ där $z\le 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F}=(x\cos y,-\sin y,z^2)$. 4 p

4. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2=1$ och $z=\sqrt{1+3y^2}$ med kurvans riktning sådan att kurvans projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Låt γ_2 vara den del av γ_1 där $x\ge 0$, $y\ge 0$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma 4x^3y^2z\,dx+2x^4yz\,dy+(x^2+x^4y^2+z^2)\,dz$$

dels om $\Gamma=\gamma_1$ och dels om $\Gamma=\gamma_2$. 4 p

5. Visa att kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{y^3-y}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,dx+\frac{x^3-x}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,dy$$

är oberoende av vägen för kurvor γ i området $x^2+y^2>1$. Bestäm också kurvintegralens värde då γ är räta linjen från punkten $(2,0)$ till punkten $(1,1)$. 4 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 6 p

7. (d'Alemberts kvotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ har nollskilda termer sådana att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\to A \text{ då } k\to\infty, \text{ där } 0\le A\le\infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ är absolutkonvergent om $0\le A<1$, och divergent om $1<A\le\infty$. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning ti 24/1 kl 12.30-12.45 i rum 328 hus 6, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.