Lösningar till Matematisk analys 4, 060117

1. a) Sätt

$$a_k = \left(k+2+\frac{1}{k+2}\right)x^k = \frac{(k+2)^2+1}{k+2}x^k$$

För $x \neq 0$ har vi då att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\big((k+3)^2+1\big)|x|^{k+1}}{k+3}\,\frac{k+2}{\big((k+2)^2+1\big)|x|^k} = \frac{(k+2)\big((k+3)^2+1\big)}{(k+3)\big((k+2)^2+1\big)}|x| =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(\left(1+\frac{3}{k}\right)^2+\frac{1}{k^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{k}\right)\left(\left(1+\frac{2}{k}\right)^2+\frac{1}{k^2}\right)}|x| \to |x| \quad \text{då} \quad k\to\infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att givna potensserien är absolutkonvergent och därmed konvergent om $|x| < 1$ samt att potensserien är divergent om $|x| > 1$. Potensserien är självklart konvergent om $x = 0$. Vidare har vi att

$$|x| = 1 \quad\Longrightarrow\quad |a_k| = k+2+\frac{1}{k+2} \quad\Longrightarrow\quad a_k \not\to 0 \quad \text{då} \quad k\to\infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{är divergent.}$$

Givna potensserien är således konvergent precis om $|x| < 1$. De reella tal x som ger konvergens är alltså $-1 < x < 1$. Vi bestämmer nu potensseriens summa för dessa reella tal. Summan kan fås genom att starta med likheten (summaformeln för en oändlig geometrisk serie)

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Deriverar vi båda led och utnyttjar att en potensserie kan deriveras termvis i det inre av det intervall av reella tal där potensserien är konvergent, får vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1,$$

som efter multiplikation av båda led med x ger att

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Av (1) och (2) fås att

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{(1-x)^2} + 2\,\frac{1}{1-x} = \frac{2-x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Byter vi ut x mot t i (1) och därefter multiplicerar med t i båda led får vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1} = \frac{t}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Integrerar vi efter det båda led över intervallet $[0, x]$ där $x \in]-1, 1[$ och utnyttjar att en potensserie kan integreras termvis i det inre av det intervall av reella tal där potensserien är konvergent, får vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^{k+1}\, dt = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt, \quad -1 < x < 1,$$

dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} x^{k+2} = -x - \ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

Om $x \neq 0$ kan vi sedan dividera båda led med x^2 och få att

$$\text{(4)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} x^k = -\frac{1}{x^2} \left(x + \ln(1-x) \right), \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Av (3) och (4) följer att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k + 2 + \frac{1}{k+2} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} x^k =$$

$$= \frac{2-x}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2} \left(x + \ln(1-x) \right), \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0.$$

Om $x = 0$ är uppenbarligen den givna potensseriens summa $\frac{5}{2}$. Den givna potensserien är därmed summerad för alla reella tal x i $-1 < x < 1$.

Anmärkning. Summan av serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} x^k$$

för $-1 < x < 1$ kan också fås genom att utgå ifrån likheten

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad -1 < x \leq 1.$$

Byter vi ut x mot $-x$ i denna likhet fås att

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k, \quad -1 \leq x < 1,$$

Det följer att

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = -x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = -x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} x^{k+2}, \quad -1 \leq x < 1,$$

varav fås att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} x^k = -\frac{1}{x^2} \left(x + \ln(1-x) \right), \quad -1 \leq x < 1, \quad x \neq 0.$$

b) I enlighet med problemtexten ansätter vi att

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \text{ och att } y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Insättning i givna differentialekvationen ger sedan att

$$(1-2x^3)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 6x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0. \tag{5}$$

Men

$$(1-2x^3)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x^3 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}}_{\text{Sätt } \ell = k-3} - \sum_{k=0}^{\infty} 2k(k-1)a_k x^{k+1} = \underbrace{\sum_{\ell=-1}^{\infty} (\ell+3)(\ell+2)a_{\ell+3}x^{\ell+1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2k(k-1)a_k x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} (k+3)(k+2)a_{k+3}x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2k(k-1)a_k x^{k+1} = 2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)a_{k+3} - 2k(k-1)a_k\big)x^{k+1}$$

och

$$-6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 6x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = -6 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k+1} + 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = -6 \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) a_k x^{k+1}.$$

Sambandet (5) kan därför skrivas

$$2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)a_{k+3} - \underbrace{(2k(k-1) + 6(k-1))}_{=2(k+3)(k-1)} a_k\big)x^{k+1} = 0,$$

dvs vi har att

$$2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)a_{k+3} - 2(k+3)(k-1)a_k\big)x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att

$$2a_2 = 0 \quad \text{och} \quad (k+3)(k+2)a_{k+3} - 2(k+3)(k-1)a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \dots$$

och alltså att

$$a_2 = 0 \quad \text{och} \quad a_{k+3} = 2\frac{k-1}{k+2}a_k \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \dots .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots \quad \text{och} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots$$

samt $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$, får vi vidare att $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \dots$ således att

$$a_{k+3} = 2\frac{k-1}{k+2}a_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{6}$$

samt

$$a_0 = 1 \quad \text{och} \quad a_1 = a_2 = 0.$$

Av $a_1 = 0$ och $a_2 = 0$ samt (6) följer att

$$a_1 = a_4 = a_7 = \ldots = 0 \quad \text{och} \quad a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$$

dvs att

$$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots \ .$$

Av $a_0 = 1$ och (6) följer att

$$\begin{aligned} a_3 &= 2\,\frac{-1}{2}\,a_0 = -2\,\frac{1}{2}, \\ a_6 &= 2\,\frac{2}{5}\,a_3 = -2^2\,\frac{1}{5} \\ a_9 &= 2\,\frac{5}{8}\,a_6 = -2^3\,\frac{1}{8}, \\ &\vdots\,, \end{aligned}$$

dvs att

$$a_{3k} = -2^k\,\frac{1}{3k-1} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Notera här också att formeln för a_{3k} även stämmer för $k = 0$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y = -\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{3k-1} x^{3k}. \tag{7}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = 2^k \frac{1}{3k-1} x^{3k}$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\begin{aligned} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} &= 2^{k+1} \frac{1}{\big(3(k+1)-1\big)} |x|^{3(k+1)} \cdot \frac{1}{2^k} (3k-1) \frac{1}{|x|^{3k}} = \\ &= 2\,\frac{3k-1}{3k+2} |x|^3 = 2\,\frac{1-\frac{1}{3k}}{1+\frac{2}{3k}} |x|^3 \to 2\,|x|^3 \quad \text{då} \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (7) är absolutkonvergent om $2|x|^3 < 1$ och divergent om $2|x|^3 > 1$. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent om $|x| < 2^{-1/3}$ och divergent om $|x| > 2^{-1/3}$, och följdaktligen är potensserielösningens konvergensradie $2^{-1/3}$ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen i intervallet $-2^{-1/3} < x < 2^{-1/3}$).

2. a) En parametrisering av γ_c är $x = t$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq c$. Den och $a + 3b = 0$ ger att

$$\int_{\gamma_c} ay\,dx + bx\,dy = \int_0^c \left(at^3 \cdot 1 + bt \cdot 3t^2\right)\,dt = (a+3b)\int_0^c t^3\,dt = 0$$

oberoende av val av $c > 0$.

b) Betrakta en godtycklig enkel styckvis-C^1-kurva γ i området $0 \leq y \leq x^3$ från en punkt på positiva x-axeln till en punkt på kurvan $y = x^3$, $x > 0$. Låt $(d, 0)$ och (c, c^3) vara startpunkten respektive slutpunkten för γ, låt γ_d vara x-axeln från origo till punkten $(d, 0)$ och låt γ_c vara kurvan $y = x^3$ från origo till punkten (c, c^3). Då är $\gamma \cup (-\gamma_d) \cup \gamma_c$ den positivt orienterade randen till området D_γ och med hjälp av Greens formel fås att

$$\int_\gamma ay\,dx + bx\,dy + \int_{-\gamma_c} ay\,dx + bx\,dy \int_{\gamma_d} ay\,dx + bx\,dy = \iint_{D_\gamma} (b-a)\,dxdy \tag{8}$$

$$= (b-a) \iint_{D_\gamma} dxdy = (b-a)\,\text{area}\,(D_\gamma)$$

Men

$$\int_{-\gamma_c} ay\,dx + bx\,dy = -\int_{\gamma_c} ay\,dx + bx\,dy = 0 \quad \text{om } a + 3b = 0 \tag{9}$$

enligt a), och

$$\int_{\gamma_d} ay\,dx + bx\,dy = 0 \tag{10}$$

eftersom x är konstant och 0 på γ_d. Av (8), (9) och (10) följer att

$$\int_\gamma ay\,dx + bx\,dy = \text{area}\,(D_\gamma)$$

om $a + 3b = 0$ och $b - a = 1$, dvs om $a = -\frac{3}{4}$ och $b = \frac{1}{4}$.

3. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 1$ där $x^2 + y^2 \leq 3$. Ytan $Y \cup Y_1$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\,dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz. \tag{11}$$

På Y_1 är $z = 1$ och $\mathbf{N}_1 = (0, 0, 1)$. Dvs $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = (x \cos y, -\sin y, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$ på hela Y_1, och alltså är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\,dS = \iint_{Y_1} dS = \text{area}\,(Y_1) = \pi \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi. \tag{12}$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2z$ och D är mängden $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \leq 1 \iff -2 \leq z \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 4 - z^2$, och vi får att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_D 2z\,dxdydz = \tag{13}$$

$$= \int_{-2}^{1} 2z \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 4-z^2} dxdy \right) dz = \int_{-2}^{1} 2z \cdot \text{area}\left(x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\right) dz =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{1} z\left(4 - z^2\right) dz = 2\pi \int_{-2}^{1} \left(4z - z^3\right) dz = 2\pi \left[2z^2 - \frac{1}{4}z^4\right]_{-2}^{1} = -\frac{9\pi}{2}$$

Insättning av (12) och (13) i (11) ger att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = -\frac{9\pi}{2} - 3\pi = -\frac{15\pi}{2}$$

4. Vi beräknar de båda kurvintegralerna genom att använda Stokes sats.

Fallet $\Gamma = \gamma_1$. Låt Y_1 beteckna den del av ytan $z = \sqrt{1+3y^2}$ där $x^2+y^2 \le 1$. En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{1+3v^2}$, $u^2+v^2 \le 1$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, \sqrt{1+3v^2}\big)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = 1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(0, 1, \frac{3v}{\sqrt{1+3v^2}}\right) \quad \text{och}$$

$$\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(0, -\frac{3v}{\sqrt{1+3v^2}}, 1\right),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N_1}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_1. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_{\gamma_1} 4x^3y^2z\,dx + 2x^4yz\,dy + \left(x^2+x^4y^2+z^2\right)\,dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_1} \left(\nabla \times \left(4x^3y^2z, 2x^4yz, x^2+x^4y^2+z^2\right)\right) \cdot \mathbf{N}_1\,dS = \iint_{Y_1} (0,-2x,0) \cdot \mathbf{N}_1\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= + \iint_{u^2+v^2\le 1} (0,-2u,0) \cdot \left(0, -\frac{3v}{\sqrt{1+3v^2}}, 1\right) dudv = 6 \iint_{u^2+v^2\le 1} \frac{uv}{\sqrt{1+3v^2}}\,dudv = 0.$$

Sista integralen ovan är 0 eftersom integranden är udda i u och integrationsområdet är symmetriskt kring $u = 0$.

Fallet $\Gamma = \gamma_2$. Kurvan γ_2 är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ_2 till en sluten kurva. Låt γ_3 vara skärningskurvan i $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ mellan ytan $z = \sqrt{1+3y^2}$ och xz-planet och låt γ_4 vara skärningskurvan i $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ mellan ytan $z = \sqrt{1+3y^2}$ och yz-planet, samt låt γ_3:s riktning vara sådan att x växer när γ_3 genomlöps och låt γ_4:s riktning vara sådan att y växer när γ_4 genomlöps. Låt vidare ytan Y_2 beteckna den del av ytan $z = \sqrt{1+3y^2}$ där $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Kurvan $\gamma_2 \cup (-\gamma_4) \cup \gamma_3$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma_2 \cup (-\gamma_4) \cup \gamma_3$ är randkurva till ytan Y_2. En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{1+3v^2}$, $(u,v) \in D$, där D är området $u^2+v^2 \le 1$, $u \ge 0$, $v \ge 0$. Låt $\mathbf{N_2}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_2. Med dessa beteckningar har vi helt analogt med fallet $\Gamma = \gamma_1$ att

$$\int_{\gamma_2} 4x^3y^2z\,dx + 2x^4yz\,dy + \left(x^2+x^4y^2+z^2\right)\,dz + \tag{14}$$

$$+ \int_{-\gamma_4} 4x^3y^2z\,dx + 2x^4yz\,dy + \left(x^2+x^4y^2+z^2\right)\,dz + \int_{\gamma_3} 4x^3y^2z\,dx + 2x^4yz\,dy + \left(x^2+x^4y^2+z^2\right)\,dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_2} \left(\nabla \times \left(4x^3y^2z, 2x^4yz, x^2+x^4y^2+z^2\right)\right) \cdot \mathbf{N}_2\,dS = \iint_{Y_2} (0,-2x,0) \cdot \mathbf{N}_2\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= + \iint_D (0, -2u, 0) \cdot \left(0, -\frac{3v}{\sqrt{1+3v^2}}, 1\right) dudv = 6 \iint_D \frac{uv}{\sqrt{1+3v^2}}\, dudv.$$

Kurvan γ_3 är linjestycket $0 \le x \le 1$, $y = 0$, $z = 1$ genomlupen i riktning växande x. En parametrisering av γ_3 är $x = t$, $y = 0$, $z = 1$, $0 \le t \le 1$, och den ger att

$$(15) \qquad \int_{\gamma_3} 4x^3y^2z\, dx + 2x^4yz\, dy + \left(x^2 + x^4y^2 + z^2\right)\, dz = \int_0^1 (0 + 0 + 0)\, dt = 0.$$

Kurvan γ_4 är kurvan $x = 0$, $0 \le y \le 1$, $z = \sqrt{1+3y^2}$ genomlupen i riktning växande y. En parametrisering av γ_4 är $x = 0$, $y = t$, $z = \sqrt{1+3t^2}$, $0 \le t \le 1$, och den ger att

$$(16) \qquad \int_{-\gamma_4} 4x^3y^2z\, dx + 2x^4yz\, dy + \left(x^2 + x^4y^2 + z^2\right)\, dz =$$

$$= -\int_{\gamma_4} 4x^3y^2z\, dx + 2x^4yz\, dy + \left(x^2 + x^4y^2 + z^2\right)\, dz = -\int_0^1 \left(0 + 0 + (1+3t^2)\frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}\right) dt =$$

$$= -\int_0^1 3t(1+3t^2)^{1/2}\, dt = -\left[\frac{1}{3}(1+3t^2)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{7}{3}.$$

Vidare är

$$(17) \qquad 6 \iint_D \frac{uv}{\sqrt{1+3v^2}}\, dudv = \int_0^1 2u \left(\int_0^{\sqrt{1-u^2}} 3v\left(1+3v^2\right)^{-1/2}\, dv\right) du =$$

$$= \int_0^1 2u \left(\left[\left(1+3v^2\right)^{1/2}\right]_{v=0}^{v=\sqrt{1-u^2}}\right) du = \int_0^1 \left(2u\left(4-3u^2\right)^{1/2} - 2u\right) du =$$

$$= \left[-\frac{2}{9}\left(4-3u^2\right)^{1/2} - u^2\right]_0^1 = \frac{5}{9}.$$

Av (14), (15), (16) och (17) följer att

$$\int_{\gamma_2} 4x^3y^2z\, dx + 2x^4yz\, dy + \left(x^2 + x^4y^2 + z^2\right)\, dz = \frac{5}{9} + \frac{7}{3} = \frac{19}{9}.$$

Anmärkning. Kurintegralen i fallet $\Gamma = \gamma_2$ kan alternativt beräknas på följande sätt. Sätt $\mathbf{F} = (4x^3y^2z, 2x^4yz, x^2 + x^4y^2 + z^2)$. Då ska kurvintegralen $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ beräknas. Rotationen $\nabla \times \mathbf{F} = (0, -2x, 0)$, som nästan är $\mathbf{0}$. Den enda nollskilda komponenten i $\nabla \times \mathbf{F}$ är andra komponenten $-2x$, en komponent som kommer från x^2-termen i tredje komponenten av $\mathbf{F}$. Sätt $\mathbf{G} = \mathbf{F} - (0, 0, x^2) = (4x^3y^2z, 2x^4yz, x^4y^2 + z^2)$. Då är således $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}$ i hela $\mathbf{R}^3$. Eftersom $\mathbf{R}^3$ är en öppen enkelt sammanhängade mängd finns därför en funktion φ sådan att $\mathbf{G} = \nabla\varphi$ i hela $\mathbf{R}^3$. En enkel räkning visar att $\varphi(x, y, x) = x^4y^2z + \frac{1}{3}z^3$ är en sådan funktion. Vi får att

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\gamma_2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\gamma_2} (0, 0, x^2) \cdot \mathbf{dr} = \int_{\gamma_2} \nabla\varphi \cdot \mathbf{dr} + \int_{\gamma_2} x^2\, dz.$$

Men

$$\int_{\gamma_2} \nabla\varphi \cdot \mathbf{dr} = \varphi(\gamma_2\text{:s slutpunkt}) - \varphi(\gamma_2\text{:s startpunkt}) = \varphi(0, 1, 2) - \varphi(1, 0, 1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Vidare är γ_2 kurvan $x = \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$, $z = \sqrt{1+3y^2}$ genomlupen i riktning växande y. En parametrisering av γ_2 är $x = \sqrt{1-t^2}$, $y = t$, $z = \sqrt{1+3t^2}$, $0 \le t \le 1$. Den ger att

$$\int_{\gamma_2} x^2\, dz = \int_0^1 (1-t^2)\frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}\, dt,$$

och görs sedan substitutionen $s = 1 + 3t^2$ fås att

$$\int_{\gamma_2} x^2\,dz = \frac{1}{6}\int_1^4 \left(4s^{-1/2} - s^{1/2}\right)\,ds = \frac{1}{6}\left[8s^{1/2} - \frac{2}{3}s^{3/2}\right]_1^4 = \frac{5}{9}.$$

Det följer att

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \frac{7}{3} + \frac{5}{9} = \frac{19}{9}.$$

5. Låt D vara området $x^2 + y^2 > 1$ och sätt

$$P(x,y) = \frac{y^3 - y}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{x^3 - x}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}$$

då $(x,y) \in D$. En enkel räkning visar att

$$P_2' = Q_1' \text{ i } D. \tag{18}$$

Området D är en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet, men inte en öppen enkelt sammanhängande delmängd av planet. Trots att (18) gäller behöver därför inte givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ vara oberoende av vägen för kurvor γ i D. Enligt resultat om kurvintegraler i en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet gäller dock att givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i D om och endast om

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ för varje enkel sluten kurva } \gamma \text{ i } D. \tag{19}$$

Använder vi också att $\int_{-\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ för varje kurva γ i D, ser vi vidare att (19) kan ersättas med

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ för varje enkel sluten positivt orienterad kurva } \gamma \text{ i } D. \tag{20}$$

Vi visar nu att (20) gäller. Vi studerar separat enkla slutna positivt orienterade kurvor i D som inte omsluter $x^2 + y^2 > 1$, och separat sådana kurvor som omsluter $x^2 + y^2 > 1$.

Låt γ vara en godtycklig enkel sluten positivt orienterad som inte omsluter $x^2 + y^2 > 1$. Beteckna med E det område som γ omsluter. Då gäller att $E \cup \gamma \subset D$ och det följer av Greens formel och av (18) att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_E (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_E 0\,dxdy = 0,$$

så (20) gäller i detta fall.

Låt nu γ vara en godtycklig enkel sluten positivt orienterad kurva som omsluter $x^2 + y^2 > 1$. Låt γ_a beteckna cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$, och låt $a > 1$ vara så litet att γ_a helt ligger innanför γ. Låt vidare E nu beteckna området mellan γ_a och γ. Då gäller att $E \cup \gamma \cup \gamma_a \subset D$ och det följer av Greens formel och av (18) att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{-\gamma_a} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{21}$$

$$= \iint_E (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_E 0\,dxdy = 0.$$

En parameterframställning av γ_a är $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $0 \le \theta < 2\pi$, och den ger att

(22)
$$\int_{-\gamma_a} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{\gamma_a} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3\sin^3\theta - a\sin\theta}{\sqrt{a^2-1}}(-a\sin\theta) + \frac{a^3\cos^3\theta - a\cos\theta}{\sqrt{a^2-1}} a\cos\theta \right) d\theta =$$

$$= \frac{a^4}{\sqrt{a^2-1}} \int_0^{2\pi} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right) d\theta - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\theta =$$

(Men $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ och
$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$)

$$= \left(\frac{a^4}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} \right) \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta = 0.$$

Av (21) och (22) följer att (20) gäller även i detta fall. Villkoret (20) är således alltid uppfyllt och följdaktligen är kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ oberoende av vägen för kurvor γ i D.

Vi beräknar nu kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ då γ är räta linjen från punkten $(2,0)$ till punkten $(1,1)$. Låt γ_1 vara x-axeln från punkten $(\sqrt{2},0)$ tillpunkten $(2,0)$ och låt γ_2 vara cirkeln $x^2 + y^2 = 2$ i första kvadranten från punkten $(\sqrt{2},0)$ till punkten $(1,1)$. Då är $(-\gamma_2)\cup\gamma_1$också en kurva i D från från punkten $(2,0)$ till punkten $(1,1)$. Eftersom givna kurvintegralen ät oberoende av vägen för kurvor i D får vi att

(23)
$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{-\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= -\int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Eftersom y är konstant och 0 på γ_1 samt $P(x,0) = 0$ är

(24)
$$\int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

En parametrisering av γ_2 är $x = \sqrt{2}\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\sin\theta$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, och den ger enligt (22) ovan att (sätt $a = \sqrt{2}$ där och byt ut övre gränsen 2π mot $\pi/4$)

(25)
$$\int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta = [\sin 2\theta]_0^{\pi/4} = 1.$$

Av (23), (24) och (25) följer att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 1.$$

Anmärkning. Man kan också lösa uppgiften genom att hitta en potential till (P,Q) i D. (Här är P, Q och D som ovan.) Derivering visar att $\varphi(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ uppfyller att $(P,Q) = \nabla\varphi$ i D, så $\varphi(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ är en potential till (P,Q) i den öppna bågvis sammanhängande mängden D. Eftersom det finns en potential till (P,Q) i D så är kurvintegralen $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ oberoende av vägen för kurvor γ i D. Om γ är räta linjen från punkten $(2,0)$ till punkten $(1,1)$ gäller vidare att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \varphi(1,1) - \varphi(2,0) = 1 - 0 = 1.$$

Det är dock inte så lätt rent räknetekniskt att genom integration räkna fram att $\varphi(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ är en potential till (P,Q) i D.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.