MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Andrzej Szulkin

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4, 5 poäng
den 29 maj 2006 kl 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

Ett nödvändigt villkor för godkänt resultat är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Är detta villkor uppfyllt, ger 14 poäng säkert godkänt.

Problemdel

1. Beräkna $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ samt $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+4y^2}, \frac{x}{x^2+4y^2}\right)$, σ är halvellipsen $x^2+4y^2=1$, $y \geq 0$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$ och γ är parabeln $y = 2+x-x^2$ från $(2,0)$ till $(-1,0)$. 4 p

2. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, där $\mathbf{F} = (x^2-4xz^3,\, xz^2+2y,\, 1+z^4)$, Y är ytan $x^2+y^2-z^2=1$, $-1 \leq z \leq 2$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som pekar bort från z-axeln. 4 p

3. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (2xyz+y,\, x^2z,\, x^2y+y)$ och γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = 2x^2-3y^2$ och $x^2+2y^2=1$, genomlupen ett varv moturs uppifrån sett. 4 p

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (-yg(r),\, xg(r))$, där $r = \sqrt{x^2+y^2}$ och g är en funktion av klass C^1 i mängden $\Omega = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : (x,y)\neq(0,0)\}$. Bestäm alla g sådana att $\mathbf{F}$ är konservativt på *någon* öppen delmängd av Ω samt alla g för vilka $\mathbf{F}$ är konservativt på *hela* Ω. 4 p

5. a) Visa att $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent för alla $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. 3 p

   b) Undersök för vilka x var och en av serierna $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{x^{k^2}}{k!}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty x^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ konvergerar. 3 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 6 p

7. (Satsen om en potensseries konvergensradie.) Visa att för en potensserie kring 0 i variabeln x gäller något av följande tre alternativ.
   (i) Potensserien konvergerar enbart för $x = 0$.
   (ii) Det finns ett tal $r > 0$ sådant att potensserien är absolutkonvergent om $|x| < r$ och divergent om $|x| > r$.
   (iii) Potensserien är absolutkonvergent för alla x.
   I uppgiften ingår även att visa följande hjälpsats: $\sum_{k=0}^\infty a_k x_0^k$ konvergent och $x_0 \neq 0 \implies \sum_{k=0}^\infty |a_k x^k|$ konvergent för alla x med $|x| < |x_0|$. 6 p

Skrivningsåterlämning onsdag den 31 maj kl. 15.00 i sal 21, hus 5, därefter hos Tom Wollecki, rum 208, hus 6.