Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk analys 4
den 29 maj 2006

1. En parametrisering av σ är $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$, $0 \le t \le \pi$.
Så $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (-\frac{1}{2}\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \frac{1}{2}\cos t) = \frac{1}{2}$ och $\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi dt = \frac{\pi}{2}$.
Eftersom $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+4y^2}\right) = \frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+4y^2}\right)$, följer det ur Greens sats att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ_0 är linjestycket $y = 0$, $1 \le x \le 2$, från $(2,0)$ till $(1,0)$. Eftersom en parametrisering av $-\gamma_0$ är $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $1 \le t \le 2$, får vi $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (0, \frac{1}{t}) \cdot (1,0) = 0$ och $\int_{\gamma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\gamma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{2}$.

2. Sätt $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, låt Y_1 vara ytan $z = -1$, $x^2+y^2 \le 2$, orienterad nedåt, Y_2 ytan $z = 2$, $x^2+y^2 \le 5$, orienterad uppåt och K den kropp som begränsas av $Y \cup Y_1 \cup Y_2$. Enligt Gauss sats är

$$\iint_{Y\cup Y_1\cup Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (2x+2)\,dxdydz,$$

så

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iiint_K (2x+2)\,dxdydz - \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS - \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS.$$

På Y_1 är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (P, Q, 2) \cdot (0,0,-1) = -2$ och på Y_2 är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (P, Q, 17) \cdot (0,0,1) = 17$. Så

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = -2\iint_{Y_1} dS = -2 \cdot (\text{arean av cirkelskiva med radien } \sqrt{2}) = -4\pi,$$
$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = 17\iint_{Y_1} dS = 17 \cdot (\text{arean av cirkelskiva med radien } \sqrt{5}) = 85\pi.$$

Vidare är

$$\iiint_K (2x+2)\,dxdydz = [\text{p.g.a. symmetri}] = 2\iiint_K dxdydz = 2\int_{-1}^2 \left(\iint_{x^2+y^2\le 1+z^2} dxdy\right) dz$$
$$= 2\pi\int_{-1}^2 (1+z^2)\,dz = 2\pi\left[z + \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^2 = 12\pi.$$

Det följer att $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = 12\pi + 4\pi - 85\pi = -69\pi$.

3. Enligt Stokes sats är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_Y (1,0,-1) \cdot \mathbf{N}\,dS$, där Y är ytan $z = 2x^2 - 3y^2$, $x^2 + 2y^2 \le 1$, orienterad uppåt. En parametrisering av Y är $\mathbf{r}(s,t) = (s, t, 2s^2 - 3t^2)$, $s^2 + 2t^2 \le 1$. Så $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-4s, 6t, 1)$ och

$$\iint_Y (1,0,-1) \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_{s^2+2t^2\le 1} (1,0,-1) \cdot (-4s, 6t, 1)\,dsdt = \iint_{s^2+2t^2\le 1} (-4s-1)\,dsdt =$$
$$[\text{p.g.a. symmetri}] = -\iint_{s^2+2t^2\le 1} dsdt = [s = u,\ t = (1/\sqrt{2})v] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{u^2+v^2\le 1} dudv = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Det följer att $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4. Ett nödvändigt villkor för att $\mathbf{F}$ skall vara konservativt är $\dfrac{\partial}{\partial x}(xg(r)) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-yg(r))$. Eftersom $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r}$, är $\dfrac{\partial}{\partial x}(xg(r)) = g(r) + xg'(r)\dfrac{x}{r} = g(r) + g'(r)\dfrac{x^2}{r}$. På liknande sätt är $\dfrac{\partial}{\partial y}(yg(r)) = g(r) + g'(r)\dfrac{y^2}{r}$. Så villkoret $\dfrac{\partial}{\partial x}(xg(r)) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-yg(r))$ är ekvivalent med $0 = \dfrac{\partial}{\partial x}(xg(r)) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yg(r)) = 2g(r) + g'(r)\dfrac{x^2+y^2}{r} = 2g(r) + rg'(r)$. Differentialekvationen $rg'(r) + 2g(r) = 0$ kan t.ex. lösas med separation av variabler: $\dfrac{dg}{g} = -\dfrac{2}{r} \implies \ln g = -2\ln r + c_1 \implies g(r) = \dfrac{c}{r^2}$. Låt Ω_0 vara en öppen enkelt sammanhängande delmängd av Ω. Då är villkoret ovan också tillräckligt för att $\mathbf{F}$ skall vara konservativt i Ω_0. Så $\mathbf{F}$ är konservativt på *någon* öppen delmängd av Ω om och endast om $g(r) = c/r^2$. I detta fall är $\mathbf{F} = c\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = c\mathbf{B}$ (c en godtycklig konstant). Eftersom $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} \neq 0$ t.ex. om γ är cirkeln $x^2+y^2 = 1$, blir $\mathbf{F}$ konservativt på hela Ω endast om $c = 0$ (dvs. om $g(r) = 0$ och $\mathbf{F} = (0,0)$).

5. a) Integralen är generaliserad i 0 och ∞. Eftersom $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$ då $t \to 0$, är $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\alpha}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{x^{-\alpha}\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ och vi kan jämföra med $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{-\alpha}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1/2}}$ som är konvergent då $\alpha > 1/2$. Alltså konvergerar $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\alpha}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ för sådana α. Eftersom $\left|x^{-\alpha}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right| \le x^{-\alpha}$ och $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ konvergerar när $0 < \alpha < 1$, konvergerar även $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ då. Det följer att den givna integralen är konvergent för $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

b) Låt $a_k = \dfrac{x^{k^2}}{k!}$. Då är $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{|x|^{(k+1)^2}}{(k+1)!}\dfrac{k!}{|x|^{k^2}} = \dfrac{|x|^{k^2+2k+1}k!}{(k+1)k!|x|^{k^2}} = \dfrac{|x|^{2k+1}}{k+1}$. Så $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ är 0 om $|x| \le 1$ och $+\infty$ om $|x| > 1$. Alltså konvergerar serien om och endast om $|x| \le 1$.

Låt nu $a_k = x^k \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$. Man kan visa att $|a_k|^{1/k} \to |x|$ då $k \to \infty$ men det går också att resonera på följande sätt: Om $x = 1$, får vi serien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Eftersom $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ då $x \to 0$, är $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = 1$. Då $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ divergerar, divergerar även $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Så konvergensradien $r \le 1$. Om $x = -1$, får vi serien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ i stället. Den konvergerar enligt Leibniz kriterium eftersom $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ avtar mot 0. Alltså är konvergensradien $r \ge 1$. Slutsatsen blir att konvergensradien är 1 och serien konvergerar om och endast om $-1 \le x < 1$. (Att $r \le 1$ resp. $r \ge 1$ följer ur sats 3.1 i (K): en potensserie konvergerar för *alla* x med $|x| < r$ och divergerar för *alla* x med $|x| > r$.)

För svaren till frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.