MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Andrzej Szulkin

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4, 5 poäng
den 24 augusti kl 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

Ett nödvändigt villkor för godkänt resultat är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Är detta villkor uppfyllt, ger 14 poäng säkert godkänt.

Problemdel

1. Konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i två ytor. Beräkna arean av var och en av dessa ytor. 4 p

2. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, där $\mathbf{F} = (y^2 - 4xz^3,\ 2y + z^4,\ x^2 + y^2 + z^4)$, Y är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 1$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som har positiv z-komponent. 4 p

3. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ och $\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2},\ \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} + y + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right)$, $\mathbf{G}(x, y) = \left(\dfrac{xy - y}{x^2 + y^2},\ \dfrac{x + y^2}{x^2 + y^2} + y + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right)$ och γ är linjestycket från $(1, 0)$ till $(0, 2)$. 4 p

4. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (x^2 z^4,\ y + z^5,\ y^3 + 5yz^4)$ och γ är skärningskurvan mellan ytorna $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och $z = x$, genomlupen ett varv moturs uppifrån sett. 4 p

5. a) Undersök för vilka x var och en av serierna $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x-1)^k}{\ln k}$ och $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$ konvergerar. 4 p

   b) För vilka $\alpha > 0$ är $\displaystyle\int_0^\infty x \sin \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ konvergent? 2 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. 6 p

7. (Satsen om en potensseries konvergensradie.) Visa att för en potensserie kring 0 i variabeln x gäller något av följande tre alternativ.
   (i) Potensserien konvergerar enbart för $x = 0$.
   (ii) Det finns ett tal $r > 0$ sådant att potensserien är absolutkonvergent om $|x| < r$ och divergent om $|x| > r$.
   (iii) Potensserien är absolutkonvergent för alla x.
   I uppgiften ingår även att visa följande hjälpsats: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konvergent och $x_0 \neq 0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergent för alla x med $|x| < |x_0|$. 6 p

Skrivningsåterlämning tisdag den 29 augusti kl. 12.20 i sal 14, hus 5, därefter hos Tom Wollecki, rum 208, hus 6.