Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk analys 4
den 24 augusti 2006

1. Konen och sfären skär varandra då $z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Vi får $x^2+y^2 = 1-x^2-y^2$ och $x^2+y^2 = 1/2$. En parametrisering av den övre ytan är därför $\mathbf{r}(s,t) = \left(s,t,\sqrt{1-s^2-t^2}\right)$, $s^2+t^2 \le 1/2$. Så $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \left(1,0,-s/\sqrt{1-s^2-t^2}\right) \times \left(0,1,-t/\sqrt{1-s^2-t^2}\right) = \left(s/\sqrt{1-s^2-t^2}, t/\sqrt{1-s^2-t^2}, 1\right)$, $|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| = 1/\sqrt{1-s^2-t^2}$ och arean av den övre ytan är

$$\iint_{s^2+t^2\le 1/2} |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|\, dsdt = \iint_{s^2+t^2\le 1/2} \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\, dsdt = [\text{polära koordinater}]$$

$$= \iint_{\substack{0\le r\le 1/\sqrt{2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, drd\varphi = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = 2\pi \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Att en primitiv funktion till $r/\sqrt{1-r^2}$ är $-\sqrt{1-r^2}$ inses direkt eller genom substitution $1-r^2 = u$.

Eftersom hela sfärens area är 4π, är arean av den nedre ytan $2\pi\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Sätt $\mathbf{F} = (P,Q,R)$, låt Y_1 vara ytan $z=1$, $x^2+y^2 \le 3$, orienterad nedåt och K den kropp som begränsas av $Y \cup Y_1$. Enligt Gauss sats är

$$\iint_{Y\cup Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = 2\iiint_K dxdydz,$$

vilket ger

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = 2\iiint_K dxdydz - \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS.$$

En parametrisering av Y_1 är $\mathbf{r}(s,t) = (s,t,1)$, $s^2+t^2 \le 3$. Så $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (0,0,1)$ och

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = [\text{eftersom } Y_1 \text{ orienterad nedåt}] = \iint_{s^2+t^2\le 3} (P,Q,s^2+t^2+1)\cdot(0,0,-1)\, dsdt$$

$$= -\iint_{s^2+t^2\le 3} (s^2+t^2+1)\, dsdt = -\iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{3}\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} (r^3+r)\, drd\varphi = -2\pi\int_0^{\sqrt{3}} (r^3+r)\, dr = -\frac{15}{2}\pi.$$

Det återstår att beräkna trippelintegralen.

$$2\iiint_K dxdydz = 2\int_1^2 \left(\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2} dxdy\right) dz = 2\pi\int_1^2 (4-z^2)\, dz = \frac{10}{3}\pi$$

(dubbelintegralen är lika med arean av cirkelskiva med radien $\sqrt{4-z^2}$). Alltså är $\displaystyle\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \frac{10}{3}\pi + \frac{15}{2}\pi = \frac{65}{6}\pi$.
[Det går även att beräkna trippelintegralen genom att integrera m.a.p. z först.]

3. Först söker vi en potentialfunktion till $\mathbf{F}$, dvs. en funktion U sådan att $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} + y + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.
Vi får $U(x,y) = \displaystyle\int \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx = \frac{1}{2}y\ln(x^2+y^2) + \varphi(y)$ och vidare $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \dfrac{y^2}{x^2+y^2} +$

$\varphi'(y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} + y + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. Så $\varphi'(y) = y$, $\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2$ (integrationskonstanten är satt till 0) och $U(x,y) = \dfrac{1}{2}y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{1}{2}y^2$. Det följer att $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(0,2) - U(1,0) = \ln 4 + 2$.

Eftersom $\mathbf{G} = \mathbf{F} + \mathbf{B}$, där $\mathbf{B} = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, räcker det att beräkna integralen av $\mathbf{B}$. Sätt $\mathbf{B} = (P,Q)$. Här är $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$, men en potentialfunktion till $\mathbf{B}$ som är definierad i en omgivning av γ är inte så enkel att bestämma. I stället byter vi γ mot $\gamma_1+\gamma_2$, där γ_1 är kvartscirkeln $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$ och γ_2 är sträckan $\mathbf{r}(t) = (0,t)$, $1 \le t \le 2$. Eftersom $\displaystyle\int_{\gamma_1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = \frac{\pi}{2}$ och $\displaystyle\int_{\gamma_2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 (-\frac{1}{t}, 0)\cdot(0,1)\,dt = 0$, är $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = \ln 4 + 2 + \frac{\pi}{2}$.

4. Enligt Stokes sats är $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y (3y^2, 4x^2z^3, 0)\cdot\mathbf{N}\,dS$, där Y är den del av planet $z = x$, där $2x^2 + y^2 - x^2 = x^2 + y^2 \le 1$ (planet skall vara orienterat uppåt). En parametrisering av Y är $\mathbf{r}(s,t) = (s,t,s)$, $s^2+t^2 \le 1$. Så $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-1,0,1)$ och

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{s^2+t^2\le 1} (3t^2, 4s^5, 0)\cdot(-1,0,1)\,dsdt = -3\iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\,dsdt = [\text{symmetri}]$$

$$= -\frac{3}{2}\iint_{s^2+t^2\le 1}(s^2+t^2)\,dsdt = [\text{polära koordinater}] = -\frac{3}{2}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} r^3\,drd\varphi = -3\pi\int_0^1 r^3\,dr = -\frac{3}{4}\pi.$$

[Det går även att beräkna $\iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\,dsdt$ direkt, utan att utnyttja symmetri.]

5. a) Låt $a_k = \dfrac{(2x-1)^k}{\ln k}$. Då är $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{|2x-1|^{k+1}}{\ln(k+1)}\,\dfrac{\ln k}{|2x-1|^k} = \dfrac{\ln k}{\ln(k+1)}|2x-1|$ och $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |2x-1|$ eftersom $1 \ge \dfrac{\ln k}{\ln(k+1)} \ge \dfrac{\ln k}{\ln 2k} = \dfrac{\ln k}{\ln 2 + \ln k} \to 1$. Så serien konvergerar om $|2x-1| < 1$, dvs. $0 < x < 1$, och divergerar om $|2x-1| > 1$, dvs. $x < 0$ eller $x > 1$. För $x = 1$ får vi serien $\sum_{k=2}^\infty 1/\ln k$ som divergerar enl. jämförelsekriterium I eftersom $1/\ln k \ge 1/k$, och för $x = 0$ får vi $\sum_{k=2}^\infty (-1)^k/\ln k$ som konvergerar enl. Leibniz kriterium eftersom $1/\ln k$ avtar mot 0. Alltså konvergerar $\sum_{k=2}^\infty a_k$ om och endast om $0 \le x < 1$.

Låt $b_k = \dfrac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$. $\left|\dfrac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \dfrac{((k+1)!)^2|x|^{k+1}}{(2k+2)!}\,\dfrac{(2k)!}{(k!)^2|x|^k} = \dfrac{(k!)^2(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}\,\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}|x| = \dfrac{k+1}{2(2k+1)}|x| \to \dfrac{|x|}{4}$ då $k\to\infty$. Alltså konvergerar serien då $|x| < 4$ och divergerar då $|x| > 4$. För $|x| = 4$ är $\left|\dfrac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \dfrac{2k+2}{2k+1} > 1$. Eftersom $|b_k|$ är växande, kan inte b_k gå mot 0, så serien divergerar. Det följer att $\sum_{k=0}^\infty b_k$ konvergerar om och endast om $-4 < x < 4$.

b) Eftersom $0 \le |x\sin(1/x^\alpha)| \le x \to 0$ då $x \to 0^+$, är integralen generaliserad enbart i oändligheten. Eftersom $\dfrac{\sin(1/x^\alpha)}{1/x^\alpha} \to 1$ då $x\to\infty$, jämför vi integranden med $x/x^\alpha = 1/x^{\alpha-1}$. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha-1}}\,dx$ konvergerar om och endast om $\alpha > 2$. Då $x\sin(1/x^\alpha) > 0$ för $x \ge 1$, följer det ur jämförelsekriterium II att $\displaystyle\int_1^\infty x\sin\frac{1}{x^\alpha}\,dx$, och därmed även $\displaystyle\int_0^\infty x\sin\frac{1}{x^\alpha}\,dx$, konvergerar om och endast om $\alpha > 2$.

För svaren till frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.