MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Boris Shapiro

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
061221

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Konvergerar eller divergerar följande serier:

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + ... + \frac{1000^n}{n!} + ...$$

$$\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + ... + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + ...$$

3 p

b) Bestäm konvergensradien för

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, \ a > 0.$$

3 p

2. Beräkna massan av en kurvbåge $(x = at, y = \frac{at^2}{2}, z = 2at^2), 0 \leq t \leq 1$ vars densitet följer lagen $\rho = \sqrt{2y/a}$. 4 p

3. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$$

längs en godtycklig kurvbit som sammanbinder $(1, \pi)$ med $(2, \pi)$ och inte skär y-axeln. 2 p

b) Låt Γ vara den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som går genom origo och punkterna $(1, 1)$ och $(2, 6)$. Beräkna skillnaden mellan $\int_{\Gamma_1} (x + y^2)dx - (x - y)^2 dy$ och $\int_{\Gamma_2} (x + y^2)dx - (x - y)^2 dy$ där Γ_1 är parabeln Γ från $(1, 1)$ till $(2, 6)$ och Γ_2 är rätta linjen mellan $(1, 1)$ och $(2, 6)$.

2 p

4. Beräkna kurvintegralen $\int_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ där C är den övre delen (dvs $z > 0$) av snittet mellan $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ och $x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$ genomlupet en gång moturs (m.a.p. projektion på xy-planet). 4 p

5. Beräkna ytintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ där ytan S ges av ekvationen $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| = 1$ och $\mathbf{F} = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$.

4 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden i rummet med en under- och en översida, en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 6 p

7. (Cauchys rotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att

$$|a_k|^{1/k} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 \leq A \leq \infty$. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning onsdag den 27 december kl 12.15-12.45 i sal 15 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i hus 6.