MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Lösningsförslag till Analys 4, 06-12-21

1. a) Konvergerar eller divergerar följande serier:

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+....+\frac{1000^n}{n!}+....$$

$$\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+...+\frac{3^n\cdot n!}{n^n}+...$$

3 p

b) Bestäm konvergensradien för

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},\ a>0.$$

3 p

Lösning. a)-1. Betrakta $b_n = \sqrt[n]{\frac{1000^n}{n!}}$. Man har $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1000}{\sqrt[n]{n!}}$. Låt oss visa att $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}! = +\infty$. Detta medför att $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ och att serien är konvergent enligt rotkriteriet. Betrakta $c_n = \ln\sqrt[n]{n}! = \frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+...+\ln n)$. Man har $c_n \geq \frac{1}{n}\int_1^{n-1}\ln x dx = \frac{1}{n}(x\ln x - x)|_1^{n-1} = \frac{1}{n}((n-1)(\ln(n-1)-1)+1) \geq \frac{(n-1)(\ln(n-1)-1)}{n}$. Detta medför att $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ vilket i sin tur medför att $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}! = +\infty$.
a)-2. Betrakta $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = 3(\frac{n}{n+1})^n$. Notera att $(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}$. Eftersom $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n = e$ gäller att $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e}$. Sammanlagt gäller att $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{e} > 1$ vilket medför enligt kvotkriteriet att serien är divergent.
b) Betrakta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}a^{\sqrt{n}}}{x^n a^{\sqrt{n+1}}} = xa^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}.$$

Ifall $n\to\infty$ konvergerar denna kvot till x vilket medför att konvergensradie för serien är lika med 1.

2. Beräkna massan av en kurvbåge $(x=at, y=\frac{at^2}{2}, z=2at^2), 0\leq t\leq 1$ vars densitet följer lagen $\rho=\sqrt{2y/a}$. 4 p

Lösning. Eftersom $\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt$ framställer ett längelement av en kort kurbit gäller att massan av hela kurvbågen ges av integralen $m = \int_0^1\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\rho(t)dt$. Detta ger $m = \int_0^1\sqrt{a^2+(at)^2+(2at)^2}\sqrt{\frac{at^2}{a}}dt = \int_0^1 at\sqrt{1+t^2+16t^2}dt$. Variabelsubstitutionen $\tau = t^2$ ger $m = \frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+17\tau}d\tau$. Vidare, substitutionen $\mu = 1+17\tau$ ger $m = \frac{a}{34}\int_1^{18}\sqrt{\mu}d\mu$. Till slut $m = \frac{a}{51}\mu^{\frac{3}{2}}|_1^{18} = \frac{a}{51}(18^{\frac{3}{2}}-1)$.

3. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

längs en godtycklig kurvbit som sammanbinder $(1,\pi)$ med $(2,\pi)$ och inte skär y-axeln. 2 p

b) Låt Γ vara den parabel på formen $y = ax^2+bx+c$ som går genom origo samt $(1,1)$ och $(2,6)$. Beräkna skillnaden mellan $I_1 = \int_{\Gamma_1}(x+y^2)dx-(x-y)^2dy$ och $I_2 = \int_{\Gamma_2}(x+y^2)dx-(x-y)^2dy$ där Γ_1 är en del av Γ från $(1,1)$ till $(2,6)$ och Γ_2 är linjesegmentet från $(1,1)$ till $(2,6)$.

2 p

Lösning. a) Vi kontrollerar att vektorfältet $F = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}, \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)$ är potentiellt i området $x > 0$. Man söker lösningar till systemet

$$\begin{cases} U_x = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ U_y = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Från första ekvationen fås $U = x - \int \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx$. Om man inför en ny variabel $\tau = \frac{y}{x}$ där y tolkas som konstant då gäller $d\tau = -\frac{y}{x^2}dx$. Detta ger $U = x + y\int\cos\tau d\tau = x + y\sin\tau + \Psi(y) = x + y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(y)$, där $\Psi(y)$ är en godtycklig funktion. Insättingen i den andra ekvationen ger

$$U_y = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + \Psi'(y) = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}.$$

På grund av detta kan man anta att $\Psi(y) \equiv 0$ och potentialen ges av $U(x,y) = x + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)$. Detta medför att integralen i frågan är lika med

$$U(2,\pi) - U(1,\pi) = 2 + \pi\sin\frac{\pi}{2} - (1 + \pi\sin\pi) = 2 + \pi - 1 = 1 + \pi.$$

b) Notera att den slutna kurvan som fås om man går längs Γ_1 och sedan längs Γ_2 med den omvända orienteringen bildar den positivt orienterade randen till det område Ω som unionen $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ begränsar. Enligt Greens formel gäller

$$I_1 - I_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

där $P = x + y^2$ och $Q = -(x-y)^2$. Enkla beräkningar ger $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -2x$. Koefficienterna hos den önskade parabeln på formen $y = ax^2+bx+c$ uppfyller ekvationerna $c = 0, 1 = a+b, 6 = 4a+2b$ vilket ger $a = 2, b = 1, c = 0$ dvs, $y = 2x^2 - x$. Koefficienterna hos linjen $y = \alpha x + \beta$ som går genom $(1,1)$ och $(2,6)$ uppfyller ekvationerna $1 = \alpha + \beta, 6 = 2\alpha + \beta$ vilket ger $y = 5x - 4$. Följaktligen gäller,

$$I_1 - I_2 = -2\iint_{1\le x\le 2,\ 2x^2-x\le y\le 5x-4} xdxdy = -2\int_1^2 xdx\left[\int_{2x^2-x}^{5x-4} dy\right] = -2\int_1^2 x(-2x^2+6x-4)dx.$$

Detta ger $I_1 - I_2 = 4\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]|_1^2 = 16 - 32 + 16 - (1 - 4 + 4) = -1$.

4. Beräkna kurvintegralen $\int_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$ där C är den övre delen (dvs $z > 0$) av snittet mellan $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ och $x^2+y^2 = 2rx$, $0 < r < R$ genomlupet en gång moturs (m.a.p. projektion på xy-planet). 4 p

Lösning. Med hjälp av Stokes sats kan den önskade integralen skrivas som

$$I = \iint_\Omega rot(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}dS,$$

där $\mathbf{F} = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2)$ och Ω är den delen av ytan $x^2+y^2+z^2 = 2Rx,\ z > 0$ som projekteras på $x^2+y^2 \le 2rx$. $\mathbf{F}$:s rotation ges av formeln

$$rot(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 2(y-z, z-x, x-y).$$

Om man parametriserar Ω som $\Phi = (x, y, \sqrt{2Rx - x^2 - y^2})$ där (x, y) uppfyller $x^2 + y^2 \leq 2rx$ kan man skriva om I på formen

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 2rx} rot(\mathbf{F}) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dxdy.$$

Vidare gäller $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = (-\psi_x, -\psi_y, 1)$ där $\psi = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$. Enkla beräkningar ger

$$\psi_x = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}, \quad \psi_y = \frac{-y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}.$$

Alltså

$$I = 2 \iint_D \left(\frac{(y - \sqrt{2Rx - x^2 - y^2})(x - R)}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} + \frac{y(\sqrt{2Rx - x^2 - y^2} - x)}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} + (x - y) \right) dxdy,$$

där $D = \{x^2 + y^2 \leq 2rx\}$. Notera att $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$. Efter några förenklingar fås

$$I = 2R \iint_D \left(1 - \frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} \right) dxdy = 2R \iint_D dxdy = 2\pi R r^2.$$

Integralen $2R \iint_D -\frac{ydxdy}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} = 0$ eftersom $\frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}$ är udda funktion av variabel y.

5. Beräkna ytintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ där ytan S ges av ekvationen $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| = 1$ och $\mathbf{F} = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$. 4 p

Lösning. Integralen beräknas med hjälp av divergenssatsen, nämligen

$$I = \iiint_\Omega div(\mathbf{F}) dxdydz,$$

där Ω ges av olikheten $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| \leq 1$. Det är lätt att inse att $div(\mathbf{F}) = 3$ vilket ger att $I = 3 \cdot \mathrm{vol}(\Omega)$. För att beräkna $\mathrm{vol}(\Omega)$ byter man variabler $\bar{x} = x - y + z, \bar{y} = y - z + x, \bar{z} = z - x + y$. M.a.p dessa variabler ges Ω av olikheten $|\bar{x}| + |\bar{y}| + |\bar{z}| \leq 1$. Variabelsubstitutionens funktionaldeterminant ges av

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Notera att denna determinant ger övergång från de gamla koordinaterna till de nya! Sammanlagt gäller, $I = \frac{3}{4}\mathrm{vol}(\Omega')$ där $\Omega' = \{|\bar{x}| + |\bar{y}| + |\bar{z}| \leq 1\}$. Projektion av Ω' på $\bar{x}\bar{y}$-planet ges av $|\bar{x}| + |\bar{y}| \leq 1$. På grund av symmetrier får man $\mathrm{vol}(\Omega') = 8\mathrm{vol}(K)$ där $K = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$. Slutligen,

$$\mathrm{vol}(K) = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} dy \left[\int_0^{1-x-y} dz \right] \right] = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right] = \int_0^1 \left(1 - 2x + x^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx,$$

vilket ger $\mathrm{vol}(K) = \frac{1}{6}$. Svar. $I = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} = 1$.