

Inga hjälpmedel tillåtna.

### Problemdel

1. a) Konvergerar eller divergerar följande serier:

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}.$$

3 p

- b) Bestäm de reella tal  $x$  för vilka serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

konvergerar.

3 p

2. Beräkna volymen av *hela* kroppen begränsad av ytorna  $z^2 = xy$  och  $|x| + |y| = 1$ . 4 p

3. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$$

där  $C$  ges av  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

2 p

- b) Visa att  $F = (x + y, x - y)$  är ett potentialfält genom att bestämma dess potential och beräkna därefter  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} F \cdot dr$ .

2 p

4. Bestäm skillnaden mellan ytintegralerna  $\iint_{Y_1} (x^2, y^2, z^2) \mathbf{N} d\mathbf{S}$  och  $\iint_{Y_2} (x \cdot y^2, z^2) \mathbf{N} d\mathbf{S}$  där  $Y_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  och  $Y_2 : |x| + |y| + |z| = 1$ . 4 p

5. Beräkna kurvintegralen  $\int (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$  längs kurvan  $x = a \cos^3 \phi$ ,  $y = a \sin^3 \phi$ ,  $z = h \left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^3$  från  $(a, 0, 0)$  till  $(a, 0, h)$ .

4 p

### Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Låt  $\mathbf{F} = (P, Q)$  vara ett  $C^1$ -vektorfält definierat i en enkelt sammanhängande öppen delmängd  $\Omega$  av planet. Visa att kurvintegraler av  $\mathbf{F}$  i  $\Omega$  är oberoende av vägen om och endast om  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Ge även ett exempel som visar att denna ekvivalens inte gäller om enkelt sammanhängande byts mot bågvis sammanhängande.

6 p

7. (Cauchys konvergenzkriterium för positiva serier.) Låt  $f(x)$  vara  $\geq 0$  och avtagande på intervallet  $x \geq 1$ . Visa att den oändliga serien  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  och den generaliserade integralen  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  då båda är konvergenta och divergenta samtidigt. 6 p

*Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.*

*Skrivningsåterlämning tisdag den 23 januari kl 12.15-12.45 i sal 15 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i hus 6.*