Lösningsförslag till tentament i Analys 4, 07-01-16

Problem 1. a) Konvergerar eller divergerar följande serier:

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}.$$

Lösning. Betrakta kvoten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000\cdot 1001\cdot\ldots\cdot(1000+n)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n+1)\cdot 1000\cdot 1001\cdot\ldots\cdot(1000+n-1)} = \frac{1000+n}{2n+1}$. Detta medför $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Serien är konvergent enligt kvotkriteriet.

Betrakta $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} \sqrt[n]{n^3}$. Eftersom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$ gäller att $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$. Serien konvergerar.

b) Bestäm de reella tal x för vilka serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

konvergerar.

Lösning. Betrakta kvoten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}(n+1)^2}{x^n n^2} = x\frac{n^2}{(n+1)^2}$. Eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$ gäller att konvergensradien är lika med 1. Det återstår att betrakta punkterna $x = \pm 1$. Det är lätt att inse att serien konvergerar i bägge dessa punkter. Nämligen, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent enligt Cauchys integralkriterium. Detta medför att även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ är konvergent.

Problem 2. Beräkna volymen av kroppen begränsad av ytorna $z^2 = xy$ och $|x| + |y| = 1$.

Lösning. Denna kropp har dubbelt så stor volym som kroppen K som ges av $\{|z| \le \sqrt{xy},\ x \ge 0, y \ge 0,\ x+y \le 1\}$. Man har

$$vol(K) = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} dy \left[\int_{-\sqrt{xy}}^{\sqrt{xy}} dz\right]\right] = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} 2\sqrt{xy}dy\right] = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx \left[\int_0^{1-x} \sqrt{y}dy\right].$$

Vidare, $vol(K) = \frac{4}{3}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$. Den sistnämnda integralen $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$ är lika med $\frac{\pi}{16}$ vilket ger $vol(K) = \frac{\pi}{12}$. Svar. $\frac{\pi}{6}$. För att inse att $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{\pi}{16}$ byter man $t = \sqrt{x}$ vilket ger

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx = 2\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt.$$

Vidare byter man $t = \sin u$ vilket medför

$$2\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^4 u du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u \cos^2 u du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u(1+\cos 2u)du.$$

Till slut notera att

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u(1+\cos 2u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u du = \frac{\pi}{4}.$$

Problem 3 a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$$

där C ges av $y = 1 - |1-x|,\ 0 \le x \le 2$.

Lösning. Kurvan C består av 2 kurvstycken $y = x,\ x \in [0,1]$ följd av $y = 2 - x$, $x \in [1,2]$. Vår kurvintegral I ges av

$$I = \int_0^1 (x^2+x^2)dx + \int_1^2 ((x^2+(2-x)^2)-(x^2-(2-x)^2))dx = 2\int_0^1 x^2dx + 2\int_1^2 (2-x)^2dx = \frac{4}{3}.$$

b) Visa att $F = (x+y, x-y)$ är ett potentialfält genom att bestämma dess potential och beräkna därefter $\int_{(0,1)}^{(2,3)} F \cdot dr$.

Lösning. Vi söker $P(x,y)$ sådan att

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = x + y \\ \frac{\partial P}{\partial y} = x - y. \end{cases}$$

Integration av den första ekvationen medför $P(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \Phi(y)$ där $\Phi(y)$ är en godtycklig funktion av y. Insättning i den 2:a ekvationen ger $x + \Phi'(y) = x - y$ vilket medför $\Phi'(y) = -y$ eller $\Phi(y) = -\frac{y^2}{2}$. Sammanlagt $\Phi(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{2}$. På grund av detta gäller

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} F \cdot dr = \Phi(2,3) - \Phi(0,1) = 4.$$

Problem 4. Bestäm skillnaden mellan ytintegralerna $\iint_{Y_1}(x^2,y^2,z^2)\mathbf{NdS}$ och $\iint_{Y_2}(x^2,y^2,z^2)\mathbf{NdS}$ där $Y_1 : x^2+y^2+z^2 = 1$ och $Y_2 : |x|+|y|+|z| = 1$.

Lösning. Vi använder Gauss sats. $\iint_{Y_1}(x^2,y^2,z^2)\mathbf{NdS} = \iiint_{\mathbf{x^2+y^2+z^2\le 1}} \operatorname{div}(\mathbf{x^2},\mathbf{y^2},\mathbf{z^2})\mathbf{dV} = \mathbf{2}\iiint_{\mathbf{x^2+y^2+z^2\le 1}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})\mathbf{dV}$. Eftersom vi integrerar en udda funktion över en symmetrisk kropp blir svaret 0. Samma argument gäller för den andra kroppen. Svar: 0.

Problem 5. Beräkna kurvintegralen $\int(x^2-yz)dx + (y^2-xz)dy + (z^2-xy)dz$ längs kurvan $x = a\cos^3\phi,\ y = a\sin^3\phi,\ z = h\left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^3$ från $(a,0,0)$ till $(a,0,h)$.

Lösning. Vi kompleterar kurvan med räta linjen L mellan $(a,0,h)$ och $(a,0,0)$ och anvnder Stokes sats. Notera att $rot(F) = rot(x^2-yz, y^2-xz, z^2-xy)$ ges av

$$rot(F) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy \end{pmatrix} = (0,0,0).$$

På grund av detta är den sökta integralen lika med $-\int_L (x^2-yz)dx + (y^2-xz)dy + (z^2-xy)dz$. Denna är lika med

$$\int_0^h z^2dz = \frac{h^3}{3}.$$