MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
070525

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Avgör för var och en av de båda generaliserade integralerna

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

om integralen är konvergent eller ej. 3 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $(1+x^2)y''' + 4xy'' + 2y' = 0$ med bivillkoren $y(0) = y'(0)$ och $y''(0) = 2$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 3 p

2. Låt γ vara skärningskurvan mellan ytan $x^2+y^2+z^2 = 2$, $z \geq 0$ och planet $z = x$, med kurvans riktning sådan att y-koordinaten växer längs kurvan. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (xy + 3y^5)\, dx + (y^2 - 12x^5)\, dy + (20x^2y^3 + y^4)\, dz\,.$$ 4 p

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ där Y är den del av ytan $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1 + z^2$ där $0 \leq z \leq 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (y, x, 1 + x^2 z)$. 4 p

4. Bestäm arean av den del av ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ som ligger innanför ytan $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bestäm också arean av den del av ytan $x^2+y^2+z^2 = 1$ som ligger innanför ytan $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. 4 p

5. Betrakta kurvintegralen

$$\int_\gamma 2y^5\, dx + 2x^5\, dy + 5xyz\, dz$$

för kurvor γ. Visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$, men att kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ på ytan $z = x^2 + y^2$. Bestäm också kurvintegralens värde då γ är en kurva på ytan $z = x^2 + y^2$ från punkten $(-1, 0, 1)$ på ytan till punkten $(1, 1, 2)$ på ytan. 4 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^\infty f(x)\, dx$ då båda är konvergenta och divergenta samtidigt. 6 p

7. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Antag att

   (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$
   (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

   Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} a_k$ då är konvergent och att seriens summa s uppfyller att $0 \leq s \leq a_1$. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning to 31/5 kl 12.00-12.15 i rum 328 hus 6, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.