Lösningar till Matematisk analys 4, 070525

1. a) *Den generaliserade integralen* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$:

Den är generaliserad enbart genom att integranden

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to 0^+.$$

Vi har att

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{för alla} \quad x \in]0, 1] \tag{1}$$

och att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{är en konvergent positiv generaliserad standardintegral.} \tag{2}$$

Av (1), (2) och jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx$$

är konvergent, och eftersom absolutkonvergens medför konvergens är också

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

konvergent.

Den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$:

Integranden i denna generaliserade integral är positiv i integrationsintervallet $x \ge 1$, och den generaliserade integralen är är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. Vi har att

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to \infty \tag{3}$$

enligt standardgränsvärdet

$$\frac{\sin u}{u} \to 1 \quad \text{då} \quad u \to 0,$$

och att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx \quad \text{är en divergent positiv generaliserad standardintegral,} \tag{4}$$

Av (3), (4) och jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

är divergent.

b) Vi ansätter

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \text{ och } y''' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}.$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$(1+x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + 4x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 0, \tag{5}$$

Men

$$2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^{k-1},$$

$$4x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 4x\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} 4k(k-1)a_k x^{k-1},$$

$$\begin{aligned}(1+x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + x^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + x^2\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-1}\end{aligned}$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} = \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3}}_{\text{Sätt } \ell = k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)\ell a_{\ell+2} x^{\ell-1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)k a_{k+2} x^{k-1}.$$

Sambandet (5) kan därför skrivas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big((k+2)(k+1)k a_{k+2} + \big(k(k-1)(k-2) + 4k(k-1) + 2k\big) a_k \Big) x^{k-1} = 0,$$

och eftersom $k(k-1)(k-2) + 4k(k-1) + 2k = k^2(k+1)$, som en kort räkning visar, har vi alltså att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big((k+2)(k+1)k a_{k+2} + k^2(k+1) a_k \Big) x^{k-1} = 0.$$

Vi får således att

$$(k+2)(k+1)k a_{k+2} + k^2(k+1)a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots$$

och alltså att

$$a_{k+2} = -\frac{k}{k+2}\, a_k \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots, \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots \quad \text{och}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots,$$

samt $y(0) = y'(0)$ och $y''(0) = 2$, får vi vidare att $a_0 = a_1$ och $a_2 = 2$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \dots$ således att

$$a_{k+2} = -\frac{k}{k+2}\, a_k, \quad k = 1, 2, \dots \tag{6}$$

samt

$$a_0 = a_1 = c \text{ där } c \text{ är en godtycklig konstant, och } a_2 = 1.$$

Av $a_1 = c$ och (6) följer att

$$a_3 = -\frac{1}{3}\, a_1 = -\frac{1}{3}\, c, \quad a_5 = -\frac{3}{5}\, a_3 = \frac{1}{5}\, c, \quad a_7 = -\frac{5}{7}\, a_5 = -\frac{1}{7}\, c, \quad \dots,$$

dvs att

$$a_{2k-1} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}\, c \quad \text{för} \quad k = 2, 3, \dots .$$

Notera att formeln för a_{2k-1} även stämmer för $k = 1$.
Av $a_2 = 1$ och (6) följer att

$$a_4 = -\frac{2}{4}\, a_2 = -\frac{2}{4}, \quad a_6 = -\frac{4}{6}\, a_4 = \frac{2}{6}, \quad a_8 = -\frac{6}{8}\, a_6 = -\frac{2}{8}, \quad \dots,$$

dvs att

$$a_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2}{2k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \quad \text{för} \quad k = 2, 3, \dots .$$

Notera att formeln för a_{2k} även stämmer för $k = 1$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y = c + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{c}{2k-1}\, x^{2k-1} + \frac{1}{k}\, x^{2k} \right), \tag{7}$$

där c är en godtycklig konstant. Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = (-1)^{k-1} \left(\frac{c}{2k-1}\, x^{2k-1} + \frac{1}{k}\, x^{2k} \right)$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{\left| \frac{c}{2(k+1)-1}\, x^{2(k+1)-1} + \frac{1}{k+1}\, x^{2(k+1)} \right|}{\left| \frac{c}{2k-1}\, x^{2k-1} + \frac{1}{k}\, x^{2k} \right|} = \frac{\left| \frac{c}{2k+1} + \frac{1}{k+1}\, x \right|}{\left| \frac{c}{2k-1} + \frac{1}{k}\, x \right|} |x|^2 =$$

$$= \frac{\left| c \frac{2k}{2k+1} + \frac{2k}{k+1}\, x \right|}{\left| c \frac{2k}{2k-1} + 2x \right|} |x|^2 \to \frac{|c+2x|}{|c+2x|} |x|^2 = |x|^2 \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

förutsatt att $c \neq -2x$. Om $x \neq 0$ och $c = -2x$ har vi att

$$b_k = (-1)^{k-1} \left(\frac{c}{2k-1}\, x^{2k-1} + \frac{1}{k}\, x^{2k} \right) = (-1)^{k-1} \left(\frac{-2x}{2k-1}\, x^{2k-1} + \frac{1}{k}\, x^{2k} \right) = (-1)^k \frac{1}{k(2k-1)} x^{2k},$$

och det gäller då att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{\left| \frac{x^{2(k+1)}}{(k+1)(2(k+1)-1)} \right|}{\left| \frac{x^{2k}}{k(2k-1)} \right|} = \frac{k(2k-1)}{(k+1)(2k+1)} |x|^2 =$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{k}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(2 + \frac{1}{k}\right)} |x|^2 \to |x|^2 \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

För $x \neq 0$ och godtyckligt c gäller alltså att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} \to |x|^2 \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

Enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ och godtyckligt c att den erhållna potensserielösningen (7) är absolutkonvergent om $|x|^2 < 1$ dvs om $|x| < 1$ och divergent om $|x|^2 > 1$ dvs om $|x| > 1$. För godtyckligt c har alltså den erhållna potensserielösningen konvergensradie 1, och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen i intervallet $-1 < x < 1$. Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$\arctan u = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} u^{2k-1}$$

om $-1 \leq u \leq 1$, och

$$\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} u^k$$

om $-1 < u \leq 1$, så gäller för den erhållna potensserielösningen att

$$y = c + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{c}{2k-1} x^{2k-1} + \frac{1}{k} x^{2k} \right) = c + c \arctan x + \ln(1+x^2)$$

om $-1 \leq x \leq 1$.

2. Vi använder Stokes sats för att beräkna den givna kurvintegralen. Kurvan γ är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Låt γ_1 vara skärningslinjen i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ mellan planen $z = x$ och $z = 0$, med γ_1:s riktning sådan att y-koordinaten växer längs γ_1. Dvs γ_1 är räta linjen från punkten $(0, -\sqrt{2}, 0)$ till punkten $(0, \sqrt{2}, 0)$. Låt ytan Y vara den del av planet $z = x$ där $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $z \geq 0$. Insättning av $z = x$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $z \geq 0$ ger $2x^2 + y^2 \leq 2$ och $x \geq 0$. Ytan Y är således den del av planet $z = x$ där $2x^2 + y^2 \leq 2$ och $x \geq 0$. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Då gäller (rita figur) att kurvan $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är en sluten kurva, och att kurvan $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är den med avseende på normalen $\mathbf{N}$ positivt orienterade randkurvan till ytan Y. Enligt Stokes sats gäller därför att

$$\text{(8)} \qquad \int_\gamma (xy + 3y^5)\,dx + (y^2 - 12x^5)\,dy + (20x^2y^3 + y^4)\,dz +$$

$$+ \int_{-\gamma_1} (xy + 3y^5)\,dx + (y^2 - 12x^5)\,dy + (20x^2y^3 + y^4)\,dz =$$

$$= \iint_Y \left(\nabla \times \left(xy + 3y^5, y^2 - 12x^5, 20x^2y^3 + y^4\right)\right) \cdot \mathbf{N}\,dS.$$

En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = u$, där $2u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq 0$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, u\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,1), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (-1,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\text{(9)} \qquad \iint_Y \left(\nabla \times \left(xy + 3y^5, y^2 - 12x^5, 20x^2y^3 + y^4\right)\right) \cdot \mathbf{N}\,dS =$$

$$= \iint_Y (60x^2y^2 + 4y^3, -40xy^3, -60x^4 - x - 15y^4) \cdot \mathbf{N}\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{\substack{2u^2+v^2\leq 2\\ u\geq 0}} \left(60u^2v^2 + 4v^3, -40uv^3, -60u^4 - u - 15v^4\right) \cdot (-1, 0, 1)\, dudv =$$

$$= - \iint_{\substack{2u^2+v^2\leq 2\\ u\geq 0}} \left(15(4u^4 + 4u^2v^2 + v^4) + u + 4v^3\right) dudv =$$

$$= - \iint_{\substack{2u^2+v^2\leq 2\\ u\geq 0}} \left(15(2u^2 + v^2)^2 + u + 4v^3\right) dudv =$$

(Eftersom $4v^3$ är udda i v och området $2u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq 0$ är symmetriskt kring $v = 0$.)

$$= - \iint_{\substack{2u^2+v^2\leq 2\\ u\geq 0}} \left(15(2u^2 + v^2)^2 + u\right) dudv =$$

(Gör substitutionen $s = \sqrt{2}u$, $t = v \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}}s$, $v = t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $2u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq 0$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 2$, $s \geq 0$.)

$$= - \iint_{\substack{s^2+t^2\leq 2\\ s\geq 0}} \left(15(s^2 + t^2)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{s^2+t^2\leq 2\\ s\geq 0}} \left(15(s^2 + t^2)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{0\leq r\leq \sqrt{2}\\ -\pi/2\leq\theta<\pi/2}} \left(15r^4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, r\cos\theta\right) r\, dr\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{0\leq r\leq \sqrt{2}\\ -\pi/2\leq\theta<\pi/2}} \left(15r^5 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, r^2\cos\theta\right) dr\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(15r^5 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, r^2\cos\theta\right) d\theta\right) dr =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[15r^5\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\, r^2\sin\theta\right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\right) dr =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \left(15\pi r^5 + \sqrt{2}r^2\right) dr = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{5}{2}\pi r^6 + \frac{\sqrt{2}}{3}r^3\right]_0^{\sqrt{2}} = -10\sqrt{2}\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $z = 0$, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, och med hjälp av den får vi att

(10)
$$\int_{-\gamma_1} (xy + 3y^5)\, dx + (y^2 - 12x^5)\, dy + (20x^2y^3 + y^4)\, dz =$$

$$= - \int_{\gamma_1} (xy + 3y^5)\, dx + (y^2 - 12x^5)\, dy + (20x^2y^3 + y^4)\, dz =$$

$$= - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(0 + t^2 \cdot 1 + 0\right) dt = - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Insättning av (9) och (10) i (8) ger att

$$\int_\gamma (xy + 3y^5)\, dx + (y^2 - 12x^5)\, dy + (20x^2y^3 + y^4)\, dz = -10\sqrt{2}\pi + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 0$ där $x^2 + y^2 \leq 1$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 1$ där $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1 och $\mathbf{N}_2$ den utåtriktade enhetsnormalen till Y_2, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz. \tag{11}$$

På ytan Y_1 är $\mathbf{F} = (y, x, 1)$ och $\mathbf{N}_1 = (0,0,-1)$. Dvs $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1 = -1$ på hela Y_1, och alltså är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS = -\iint_{Y_1} dS = -\text{area }(Y_1) = -\pi. \tag{12}$$

En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 1$, där $(u-1)^2+(v-1)^2 \leq 2$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 1)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v) = (0,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_2 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS = \iint_{Y} (y, x, 1+x^2z)\cdot\mathbf{N}\,dS = \tag{13}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= +\iint_{(u-1)^2+(v-1)^2\leq 2} \big(v, u, 1+u^2\big)\cdot(0,0,1)\;dudv = \iint_{(u-1)^2+(v-1)^2\leq 2} \big(1+u^2\big)\;dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u-1$, $t = v-1 \iff u = s+1$, $v = t+1$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$, och $(u-1)^2+(v-1)^2 \leq 2$ övergår i $s^2+t^2 \leq 2$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\leq 2} \big(1+(s+1)^2\big)\,|1|\,dsdt == \iint_{s^2+t^2\leq 2} \big(2+2s+s^2\big)\;dsdt =$$

(Eftersom $2s$ är udda i s och området $s^2+t^2 \leq 2$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\leq 2} \big(2+s^2\big)\;dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2 \leq 2$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \iint_{s^2+t^2\leq 2} \left(2+\frac{1}{2}(s^2+t^2)\right)\;dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\leq r\leq\sqrt{2}\\ 0\leq\theta<2\pi}} \left(2+\frac{1}{2}r^2\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(2r+\frac{1}{2}r^3\right)\,dr = 2\pi\left[r^2+\frac{1}{8}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 5\pi.$$

Vidare är $\nabla\cdot\mathbf{F} = x^2$ och D är mängden $(x-z)^2+(y-z)^2 \leq 1+z^2$, $0 \leq z \leq 1$, och vi får att

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_D x^2\,dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{(x-z)^2+(y-z)^2\leq 1+z^2} x^2\,dxdy\right)\,dz. \tag{14}$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

$$\iint_{(x-z)^2+(y-z)^2\leq 1+z^2} x^2\,dxdy = \tag{15}$$

(Gör substitutionen $u = x - z$, $v = y - z \iff x = u + z$, $y = v + z$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1$, och $(x-z)^2 + (y-z)^2 \le 1 + z^2$ övergår i $u^2 + v^2 \le 1 + z^2$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1+z^2} (u+z)^2\,|1|\,dudv = \iint_{u^2+v^2\le 1+z^2} \left(z^2 + 2zu + u^2\right)\,dudv =$$

(Eftersom $2zu$ är udda i u och området $u^2 + v^2 \le 1 + z^2$ är symmetriskt kring $u = 0$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1+z^2} \left(z^2 + u^2\right)\,dudv =$$

(Eftersom området $u^2 + v^2 \le 1 + z^2$ är symmetriskt i u och v.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1+z^2} \left(z^2 + \frac{1}{2}(u^2+v^2)\right)\,dudv =$$

(Inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{1+z^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} \left(z^2 + \frac{1}{2}r^2\right) r\,dr\,d\theta == 2\pi\int_0^{\sqrt{1+z^2}} \left(z^2 r + \frac{1}{2}r^3\right)\,dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}z^2r^2 + \frac{1}{8}r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1+z^2}} = \frac{\pi}{4}\left(1 + 6z^2 + 5z^4\right).$$

Insättning av (15) i (14) ger att

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(1 + 6z^2 + 5z^4\right)\,dz = \frac{\pi}{4}\left[z + 2z^3 + z^5\right]_0^1 = \pi. \tag{16}$$

Av (11), (12) och (13) och (16) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \pi - (-\pi) - 5\pi = -3\pi.$$

4. Vi använder formeln att en funktionsyta $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ har arean

$$A = \iint_D \sqrt{\left(f_1'(x,y)\right)^2 + \left(f_2'(x,y)\right)^2 + 1}\,dxdy.$$

I första fallet är $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Insättning av $z = \sqrt{x^2+y^2}$ i $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ ger $(x-1)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = x \iff (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, så D i första fallet är $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}$. Av $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ fås

$$\left(f_1'(x,y)\right)^2 + \left(f_2'(x,y)\right)^2 + 1 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1 = 2.$$

Arean i första fallet är således

$$A_1 = \iint_{(x-\frac{1}{2})^2+y^2<\frac{1}{4}} \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}\text{ area}\left((x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right) = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

Vi beräknar nu arean i andra fallet. Vi har att $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \iff z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$. Vidare är hela området $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ i xy-planet inkluderat i området $x^2 + y^2 \le 1$ i xy-planet.

Det följer att arean i andra fallet är dubbla arean av ytan $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}$. Av $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ fås

$$\left(f_1'(x,y)\right)^2 + \left(f_2'(x,y)\right)^2 + 1 = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{1-x^2-y^2}.$$

Arean i andra fallet är således

$$A_2 = 2\iint_{(x-\frac{1}{2})^2+y^2<\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

Vi beräknar A_2 genom att införa polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Då är $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \iff x^2+y^2 = x \iff r^2 = r\cos\theta \iff r = \cos\theta$, och om $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ genomgås hela cirkeln $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ en gång (rita figur). Integrationsområdet $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ genomgås således en gång då $0 < r < \cos\theta$ och $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Med hjälp av detta och uttrycket för A_2 ovan fås att

$$A_2 = 2\iint_{\substack{0<r<\cos\theta \\ -\pi/2<\theta\leq\pi/2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right)d\theta =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta}d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)d\theta =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin^2\theta}\right)d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\theta|)\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}(1-|\sin\theta|)\,d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\,d\theta = 4\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi - 4.$$

5. Om D är en öppen enkelt sammanhängande delmängd av rummet och om vektorfältet $\mathbf{F} \in C^1(D)$ så gäller enligt sats om kurvintegraler att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen för kurvor γ i D precis om $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ i D. Hela $\mathbf{R}^3$ är en öppen enkelt sammanhängande mängd. Den givna kurvintegralen fås om $\mathbf{F} = (2y^5, 2x^5, 5xyz)$. Klart att $\mathbf{F} \in C^1(\mathbf{R}^3)$ för detta vektorfält. Beräkning ger att $\nabla\times\mathbf{F} = (5xz, -5yz, 10x^4 - 10y^4) \neq \mathbf{0}$. Den givna kurvintegralen är därför inte oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$.

Vi övergår nu till att visa att den givna kurvintegralen är oberoende för kurvor γ på ytan $z = x^2+y^2$. Låt γ vara en godtycklig kurva på ytan $z = x^2+y^2$ och låt Γ vara projektionen av γ på xy-planet. Säg att kurvan Γ i xy-planet har parameterframställningen

(17) $$\Gamma: \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Då har kurvan γ parameterframställningen

(18) $$\gamma: \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = \big(f(t)\big)^2 + \big(g(t)\big)^2, \quad a \leq t \leq b.$$

Med hjälp av detta fås att

(19) $$\int_\gamma 2y^5\,dx + 2x^5\,dy + 5xyz\,dz =$$

(Enligt (18))

$$= \int_a^b \Big(2\big(g(t)\big)^5 f'(t) + 2\big(f(t)\big)^5 g'(t) + 5f(t)g(t)\left(\big(f(t)\big)^2 + \big(g(t)\big)^2\right)\big(2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \int_a^b \Bigg(\Big(10\big(f(t)\big)^4 g(t) + 10\big(f(t)\big)^2\big(g(t)\big)^3 + 2\big(g(t)\big)^5\Big) f'(t)$$

$$+ \Big(2\big(f(t)\big)^5 + 10\big(f(t)\big)^3\big(g(t)\big)^2 + 10f(t)\big(g(t)\big)^4\Big) g'(t)\Bigg)\, dt =$$

(Enligt (17))

$$= \int_\Gamma \left(10x^4y + 10x^2y^3 + 2y^5\right) dx + \left(2x^5 + 10x^3y^2 + 10xy^4\right) dy.$$

Det följer av (19) att den givna kurvintegrtalen är oberonde av vägen för kurvor γ på ytan $z = x^2 + y^2$ precis om kurvintegralen

$$\int_\Gamma \left(10x^4y + 10x^2y^3 + 2y^5\right) dx + \left(2x^5 + 10x^3y^2 + 10xy^4\right) dy \tag{20}$$

är oberoende av vägen för kurvor Γ i xy-planet. Vi undersöker nu om detta senare gäller genom att undersöka om det finns en potential i hela xy-planet till kurvintegralen (20). Dvs vi undersöker om det finns en funktion $\varphi(x, y)$ sådan att

$$\begin{cases} \varphi'_x(x, y) = 10x^4y + 10x^2y^3 + 2y^5 \\ \varphi'_y(x, y) = 2x^5 + 10x^3y^2 + 10xy^4\,, \end{cases} \tag{21}$$

för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Av första ekvationen i (21) fås att

$$\varphi(x, y) = 2x^5y + \frac{10}{3}x^3y^3 + 2xy^5 + \psi(y),$$

för någon funktion $\psi(y)$, och detta insatt i andra ekvationen i(21) ger att

$$2x^5 + 10x^3y^2 + 10xy^4 + \psi'(y) = 2x^5 + 10x^3y^2 + 10xy^4,$$

som är uppfyllt om $\psi'(y) = 0$ dvs om $\psi(y) = c =$ godtycklig konstant. Funktionen

$$\varphi(x, y) = 2x^5y + \frac{10}{3}x^4y^3 + 2xy^5$$

(välj $c = 0$) är således en potential till kurvintegralen (20). Enligt teorin för kurvintegraler är således denna kurvintegral oberoende av vägen för kurvor Γ i xy-planet och

$$\int_\Gamma \left(10x^4y + 10x^2y^3 + 2y^5\right) dx + \left(2x^5 + 10x^3y^2 + 10xy^4\right) dy = \tag{22}$$

$$= \varphi(\Gamma\text{:s slutpunkt}) - \varphi(\Gamma\text{:s startpunkt}).$$

Givna kurvintegralen är således oberoende av vägen för kurvor γ på ytan $z = x^2 + y^2$, och om γ är en kurva på ytan $z = x^2 + y^2$ från punkten $(-1, 0, 1)$ på ytan till punkten $(1, 1, 2)$ på ytan så följer av (19) och (22) att givna kurvintegralen $= \varphi(1, 1) - \varphi(-1, 0) = \frac{22}{3} - 0 = \frac{22}{3}$.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.