MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
070823

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Bestäm de reella tal x för vilka potensserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} x^k$$

konvergerar. Bestäm också potensseriens summa för dessa reella tal x. 3 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $(x-x^2)y''' - 3xy'' - y' = 0$ med bivillkoren $y(0) = y'(0) = 0$ och $y''(0) = 1$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 3 p

2. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \left(2x^3 - y^3\right)\, dx + \left(2x^3 - y^3\right)\, dy$$

där γ är kurvan $x^2+y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ från punkten $(2,0)$ till punkten $(0,2)$. 4 p

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ där Y är den del av ytan $(x+z)^2+y^2+z^2=4$ där $z \leq 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$. 4 p

4. Låt γ vara skärningskurvan mellan ytan $x^2+y^2+z^2=2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och ytan $2x^2+y^2=1+z^2$, med kurvans riktning sådan att x-koordinaten växer längs kurvan. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma y^3\, dx + x^3\, dy + (x^2-y^2)\, dz\,.$$ 4 p

5. Låt D vara hela $\mathbf{R}^2$ utom punkterna $(0,y)$, $-1 \leq y \leq 1$, samt låt E vara hela $\mathbf{R}^2$ utom de två punkterna $(0,-1)$ och $(0,1)$. Visa att kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{y^2-1}{x^2+(y^2-1)^2}\, dx + \frac{2xy}{x^2+(y^2-1)^2}\, dy.$$

är oberoende av vägen för kurvor γ i D, men att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i E. 4 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. (Cauchys rotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att

$$|a_k|^{1/k} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 6 p

7. (Satsen om en potensseries konvergensradie.) Visa att för en potensserie kring 0 i variabeln x gäller något av följande tre alternativ.

(i) Potensserien konvergerar enbart för $x = 0$.

(ii) Det finns ett tal $r > 0$ sådant att potensserien är absolutkonvergent om $|x| < r$ och divergent om $|x| > r$.

(iii) Potensserien är absolutkonvergent för alla x. 6 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning to 30/8 kl 12.00-12.15 i rum 328 hus 6, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.