Lösningar till Matematisk analys 4, 070823

1. a) Sätt
$$a_k = \frac{1}{k^2-1}\,x^k.$$
För $|x| \le 1$ har vi att
$$|a_k| = \frac{1}{k^2-1}|x| \le \frac{1}{k^2-1} \le \frac{1}{k^2}$$
och eftersom summan
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
är en konvergent positiv standardserie följer av jämförelsekriterium för positiva serier att summan
$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k|$$
är konvergent för $|x| \le 1$. Givna potensserien är således absolutkonvergen och därmed konvergent om $|x[\le 1$. För $|x| > 1$ har vi att
$$|a_k| = \frac{|x|^k}{k^2-1} \to \infty \quad \text{då} \quad k \to \infty \quad \Longrightarrow \quad a_k \not\to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{är divergent.}$$
Givna potensserien är således konvergent precis om $|x| \le 1$. De reella tal x som ger konvergens är alltså $-1 \le x \le 1$. Vi bestämmer nu potensseriens summa för dessa reella tal. Summan för $-1 < x < 1$ kan fås genom att starta med likheten (summaformeln för en oändlig geometrisk serie)
$$\sum_{k=2}^{\infty} x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$
Integrerar vi denna likhet över intervallet $[0, x]$ där $x \in]-1, 1[$ och utnyttjar att en potensserie kan integreras termvis i det inre av det intervall av reella tal där potensserien är konvergent, får vi att
$$\sum_{k=2}^{\infty} \int_0^x t^{k-2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt, \quad -1 < x < 1,$$
dvs att
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} x^{k-1} = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$
Multiplikation med x ger
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} x^{k} = -x\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$
Integrerar vi sedan igen över intervallet $[0, x]$ får vi att
$$\sum_{k=2}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{k-1} t^k\,dt = -\int_0^x t\ln(1-t)\,dt, \quad -1 < x < 1,$$

dvs att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} x^{k+1} = -\int_0^x t\ln(1-t)\,dt = -\left[\frac{1}{2}t^2\ln(1-t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}t^2\left(-\frac{1}{1-t}\right) tdt =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int_0^x \left(1+t-\frac{1}{1-t}\right) dt = -\frac{1}{2}x^2\ln(1-x) + \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}t^2+\ln(1-t)\right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

Division med x ger sedan att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)}x^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x), \quad -1 < x < 1 \quad x \neq 0.$$

Om $x = 0$ är uppenbarligen den givna potensseriens summa 0. Den givna potensserien är därmed summerad för alla reella tal x i $-1 < x < 1$. Det återstår att bestämma summan då $x = \pm 1$. För $x = 1$ övergår den givna potensserien i

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2N+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\Bigg(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}\right)+\left(\frac{1}{2N}-\frac{1}{2N+2}\right)\Bigg) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2N+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

För $x = -1$ övergår den givna potensserien i

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2N+1}(-1)^k\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\Bigg(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}\right)-\left(\frac{1}{2N}-\frac{1}{2N+2}\right)\Bigg) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2N+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Den givna potensserien är därmed summerad för alla reella tal x i $-1 \leq x \leq 1$.

Anmärkning. Den givna potensseriens summa för $-1 \leq x < 1$, $x \neq 0$ kan också fås genom att utgå från likheten

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k, \quad -1 < x \leq 1.$$

Byter vi ut x mot $-x$ i denna likhet fås att

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k, \quad -1 \leq x < 1,$$

Det följer att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}\, x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) x^k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1}\, x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1}\, x^k =$$

$$= \frac{1}{2}x\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1}\, x^{k-1} - \frac{1}{2x}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1}\, x^{k+1} = \frac{1}{2}x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k - \frac{1}{2x}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k =$$

$$= \frac{1}{2}x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k - \frac{1}{2x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k - x - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x\Big(-\ln(1-x)\Big) - \frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{1}{2}x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)\ln(1-x), \quad -1 \le x < 1 \quad x \neq 0.$$

Summan för $x = 0$ är 0. Men även med denna metod måste man hitta ett separat sätt att beräkna summan för $x = 1$, t ex genom att göra som redovisats ovan.

b) Vi ansätter

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \text{ och } y''' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}.$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$(x - x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} - 3x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 0, \tag{1}$$

Men

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$3x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 3x\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} 3k(k-1) a_k x^{k-1},$$

$$(x - x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} = x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} - x^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} =$$

$$= x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} - x^2\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-1}$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-2} = \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-2}}_{\text{Sätt } \ell = k-1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell+1)\ell(\ell-1)a_{\ell+1}x^{\ell-1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k(k-1)ka_{k+1}x^{k-1}.$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+1)k(k-1)ka_{k+1} - \big(k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k\big)a_k\Big)x^{k-1} = 0,$$

och eftersom $k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k = k^3$, som en kort räkning visar, har vi alltså att

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+1)k(k-1)ka_{k+1} - k^3 a_k\Big)x^{k-1} = 0.$$

Vi får således att

$$(k+1)k(k-1)ka_{k+1} - k^3 a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots$$

($k = 1$ ger $a_1 = 0$) och alltså att

$$a_{k+1} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\, a_k \quad \text{för} \quad k = 2, 3, \ldots$$

(ej för $k = 1$ eftersom då fås division med 0.) Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots, \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots \quad \text{och}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots,$$

samt $y(0) = y'(0) = 0$ och $y''(0) = 1$, får vi vidare att $a_0 = a_1 = 0$ och $a_2 = \frac{1}{2}$. (Att $a_1 = 0$ fick vi också ovan.) Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \ldots$ således att

(2) $$a_{k+1} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\, a_k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

samt

$$a_0 = a_1 = 0 \text{ och } a_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Av $a_2 = \frac{1}{2}$ och (2) följer att

$$a_3 = \frac{2^2}{1\cdot 3}\, a_2 = \frac{2^2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3^2}{2\cdot 4}\, a_3 = \frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{4}, \quad a_5 = \frac{4^2}{3\cdot 4}\, a_4 = \frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{4}{5}, \quad \ldots,$$

dvs att

$$a_k = \frac{k-1}{k} \quad \text{för} \quad k = 3, 4, \ldots\ .$$

Notera att formeln för a_k även stämmer för $k = 1$ och $k = 2$.
Den sökta potensserielösningen är alltså

(3) $$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k.$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = \frac{k-1}{k} x^k$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{\left|\frac{k}{k+1}x^{k+1}\right|}{\left|\frac{k-1}{k}x^k\right|} = \frac{k^2}{k^2-1}|x| = \frac{1}{1-\frac{1}{k^2}}|x| \to x \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

Enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| > 1$. Den erhållna potensserielösningen har alltså konvergensradie 1, och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen i intervallet $-1 < x < 1$.

Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\,x^k, \quad -1 < x \leq 1$$

och alltså (byt x mot $-x$)

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,x^k, \quad -1 \leq x < 1$$

samt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

så gäller för den erhållna potensserielösningen (3) att

$$y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)x^k = \sum_{k=1}^{\infty}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

2. Sätt

$$P(x,y) = 2x^3 - y^3 \quad \text{och} \quad Q(x,y) = 2x^3 - y^3.$$

Vi beräknar den givna kurvintegralen genom att först på lämpligt sätt komplettera kurvan γ till en sluten kurva och sedan använda Greens formel. Låt γ_1 vara y-axeln från punkten $(0,0)$ till punkten $(0,2)$, låt γ_2 vara x-axeln från punkten $(0,0)$ till punkten $(2,0)$ och låt D vara området $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Då är $\gamma \cup (-\gamma_1) \cup \gamma_2$ en enkel sluten kurva med positiv omloppsriktning, och D är kurvans inre. Enligt Greens formel gäller därför att

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + \int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men

$$\int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

och

$$Q_1' - P_2' = 6x^2 + 3y^2,$$

och det följer att

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + 3\iint_D (2x^2 + y^2)\,dxdy. \tag{4}$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $0 \leq t \leq 2$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 (-t^3)\,dt = \left[-\frac{1}{4}t^4\right]_0^2 = -4. \tag{5}$$

En parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = 0$, $0 \leq t \leq 2$, och den ger att

$$(6) \qquad \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 2t^3\,dt = \left[\frac{1}{2}t^4\right]_0^2 = 8.$$

Vidare har vi att

$$(7) \qquad \iint_D (2x^2 + y^2)\,dxdy =$$

(Eftersom området $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ är symmetriskt i x och y.)

$$\iint_D \left((x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)\,dxdy =$$

$$= \frac{3}{2}\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$= \frac{3}{2}\iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} r^2 r\,drd\theta = \frac{3\pi}{4}\int_0^2 r^3\,dr = \frac{3\pi}{4}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 3\pi$$

Insättnig av (5), (6) och (7) i (4) ger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 9\pi - 12.$$

3. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 1$ där $(x + 1)^2 + y^2 \leq 3$ (dvs Y_1 är en cirkelskiva med radien $\sqrt{3}$). Ytan $Y \cup Y_1$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$(8) \qquad \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\,dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz.$$

På ytan Y_1 är $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 1)$ och $\mathbf{N}_1 = (0, 0, 1)$. Dvs $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = 1$ på hela Y_1, och alltså är

$$(9) \qquad \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\,dS = \iint_{Y_1} dS = \text{area }(Y_1) = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi.$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ och D är mängden $(x + z)^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $-2 \leq z \leq 1$. Den undre gränsen för z i beskrivningen av D får vi av att

$$(x + z)^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad z^2 \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leq z \leq 2,$$

Vi får att

$$(10) \qquad \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz = 3\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz =$$

$$= 3\int_{-2}^1 \left(\iint_{(x+z)^2+y^2+z^2 \leq 4} (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdy\right)\,dz.$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

$$(11) \qquad \iint_{(x+z)^2+y^2+z^2 \leq 4} (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdy =$$

(Gör substitutionen $u = x + z$, $v = y \iff x = u - z$, $y = v$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1$, och $(x+z)^2 + y^2 + z^2 \le 4$ övergår i $u^2 + v^2 \le 4 - z^2$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 4-z^2} \left((u-z)^2 + v^2 + z^2\right) |1| \, dudv = \iint_{u^2+v^2\le 4-z^2} \left(u^2 + v^2 - 2zu + 2z^2\right) dudv =$$

(Eftersom $2zu$ är udda i u och området $u^2 + v^2 \le 4 - z^2$ är symmetriskt kring $u = 0$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 4-z^2} \left(u^2 + v^2 + 2z^2\right) dudv =$$

(Inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{4-z^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} \left(r^2 + 2z^2\right) r \, dr \, d\theta == 2\pi \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \left(r^3 + 2z^2 r\right) dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 + z^2 r^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4-z^2}} = 2\pi\left(\frac{1}{4}(4-z^2)^2 + z^2(4-z^2)\right) = \frac{\pi}{2}(16 + 8z^2 - 3z^4).$$

Insättning av (11) i (10) ger att

$$\text{(12)} \qquad \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F} \, dxdydz = \frac{3\pi}{2}\int_{-2}^{1} \left(16 + 8z^2 - 3z^4\right) dz = \frac{3\pi}{2}\left[16z + \frac{8}{3}z^3 - \frac{3}{5}z^5\right]_{-2}^{1} = \frac{783\pi}{10}.$$

Av (8), (9) och (12) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} \, dS = \frac{783\pi}{10} - 3\pi = \frac{753\pi}{10}.$$

4. Vi använder Stokes sats för att beräkna den givna kurvintegralen. Kurvan γ är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Av $2x^+y^2 = 1+z^2$ fås $z^2 = 2x^2+y^2-1$ som insatt i $x^2+y^2+z^2 = 2$ ger $3x^2+2y^2 = 3$. Av $y = 0$ och $3x^2 + 2y^2 = 3$ fås $x = \pm 1$. Projektionen av γ på xy-planet är således kurvan $3x^2 + 2y^2 = 3$, $y \ge 0$, $z = 0$ från punkten $(-1, 0, 0)$ till punkten $(1, 0, 0)$. Av $y = 0$ och $x^2 + y^+z^2 = 2$, $z \ge 0$ fås $x^2 + z^2 = 2$, $z \ge 0$. Av $x = \pm 1$ och $x^2 + z^2 = 2$, $z \ge 0$ fås $z = 1$. Låt γ_1 vara kurvan $x^2 + z^2 = 2$, $y = 0$, $z \ge 0$ från punkten $(1, 0, 1)$ till punkten $(-1, 0, 1)$. Låt Y vara ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $3x^2 + 2y^2 = 3$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ och låt $\mathbf{N}$ vara den nedåtriktade enhetsnormalen till Y. Då gäller (rita figur) att kurvan $\gamma \cup \gamma_1$ är en sluten kurva, och att kurvan $\gamma \cup \gamma_1$ är med avseende på normalen $\mathbf{N}$ den positivt orienterade randkurvan till ytan Y. Enligt Stokes sats gäller därför att

$$\text{(13)} \qquad \int_\gamma y^3\,dx + x^3\,dy + (x^2 - y^2)\,dz + + \int_{\gamma_1} y^3\,dx + x^3\,dy + (x^2 - y^2)\,dz =$$

$$= + \iint_Y \left(\nabla \times \left(y^3, x^3, x^2 - y^2\right)\right) \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{4 - u^2 - v^2}$, där $3u^2 + 2v^2 \le 3$, $v \ge 0$. Med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2})$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = \left(1, 0, -\frac{2u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(0, 1, -\frac{2v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right)$$

och

$$= \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(\frac{2u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, \frac{2u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, 1\right)$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

(14)
$$\iint_Y \left(\nabla \times \left(y^3, x^3, x^2-y^2\right)\right) \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

$$= \iint_Y (-2y, -2x, 3x^2-3y^2) \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= -\iint_{\substack{3u^2+2v^2\le 3\\ v\ge 0}} \left(-2v, -2u, 3u^2-3v^2\right) \cdot \left(\frac{2u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, \frac{2u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, 1\right) dudv =$$

$$= -\iint_{\substack{3u^2+2v^2\le 2\\ v\ge 0}} \left(-\frac{8uv}{\sqrt{4-u^2-v^2}} + 3u^2-3v^2\right) dudv =$$

(Eftersom $\dfrac{8uv}{\sqrt{4-u^2-v^2}}$ är udda i u och området $3u^2+2v^2 \le 2$, $v \ge 0$ är symmetriskt kring $u=0$.)

$$= -\iint_{\substack{3u^2+2v^2\le 3\\ v\ge 0}} \left(3u^2-3v^2\right) dudv = -3\iint_{\substack{3u^2+2v^2\le 3\\ v\ge 0}} \left(u^2-v^2\right) dudv =$$

(Eftersom u^2-v^2 är jämn i u och området $3u^2+2v^2 \le 2$, $v \ge 0$ är symmetriskt kring $u=0$.)

$$= -6\iint_{\substack{3u^2+2v^2\le 3\\ u\ge 0, v\ge 0}} \left(u^2-v^2\right) dudv =$$

(Gör substitutionen $s=u$, $t=\sqrt{\frac{2}{3}}v \iff u=s$, $v=\sqrt{\frac{3}{2}}t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, och $3u^2+2v^2 \le 3$, $u \ge 0$, $v \ge 0$ övergår i $s^2+t^2 \le 1$, $s \ge 0$, $t \ge 0$.)

$$= -6\iint_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0, t\ge 0}} \left(s^2-\frac{3}{2}t^2\right)\left|\sqrt{\frac{3}{2}}\right| dsdt = -3\sqrt{6}\iint_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0, t\ge 0}} \left(s^2-\frac{3}{2}t^2\right) dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2 \le 1$, $s \ge 0$, $t \ge 0$ är symmetriskt i s och t.)

$$= -3\sqrt{6}\iint_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0, t\ge 0}} \left(\frac{1}{2}(s^2+t^2) - \frac{3}{4}(s^2+t^2)\right) dsdt = \frac{3\sqrt{6}}{4}\iint_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0, t\ge 0}} \left(s^2+t^2\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$)

$$= \frac{3\sqrt{6}}{4}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^2 r\, drd\theta = \frac{3\sqrt{6}\pi}{8}\int_0^1 r^3\, dr = \frac{3\sqrt{6}\pi}{8}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{6}\pi}{32}$$

En parametrisering av γ_1 är $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=0$, $z=\sqrt{2}\sin t$, $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$, och med hjälp av den får vi att

(15)
$$\int_{\gamma_1} (y^3\, dx + x^3\, dy + (x^2-y^2)\, dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(0+0+2(\cos^2 t)(\sqrt{2}\cos t\right) dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^3 t)\, dt = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1-\sin^2 t)\cos t)\, dt = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\cos t - \sin^2 t\cos t)\, dt =$$

$$2\sqrt{2}\left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0$$

Insättning av (14) och (15) i (13) ger att

$$\int_\gamma y^3\,dx + x^3\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = \frac{3\sqrt{6}\pi}{32}.$$

5. Sätt

$$P(x,y) = -\frac{y^2-1}{x^2+(y^2-1)^2} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{2xy}{x^2+(y^2-1)^2}$$

då $(x,y) \in D$. En enkel räkning visar att

$$P_2' = Q_1' \text{ i } D. \tag{16}$$

Området D är en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet, men inte en öppen enkelt sammanhängande delmängd av planet. Trots att (16) gäller behöver därför inte givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ vara oberoende av vägen för kurvor γ i D. Enligt resultat om kurvintegraler i en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet gäller dock att givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i D om och endast om

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ för varje enkel sluten kurva } \gamma \text{ i } D. \tag{17}$$

Använder vi också att $\int_{-\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ för varje kurva γ i D, ser vi vidare att (17) kan ersättas med

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ för varje enkel sluten positivt orienterad kurva } \gamma \text{ i } D. \tag{18}$$

Vi visar nu att (18) gäller. Vi studerar separat enkla slutna positivt orienterade kurvor i D som inte omsluter punkterna $(0,y)$, $-1 \le y \le 1$, och separat sådana kurvor som omsluter $(0,y)$, $-1 \le y \le 1$.

Låt γ vara en godtycklig enkel sluten positivt orienterad som inte omsluter $(0,y)$, $-1 \le y \le 1$. Beteckna med M det område som γ omsluter. Då gäller att $M \cup \gamma \subset D$ och det följer av Greens formel och av (16) att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_M (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_M 0\,dxdy = 0,$$

så $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ gäller i detta fall.

Låt nu γ vara en godtycklig enkel sluten positivt orienterad kurva som omsluter $(0,y)$, $-1 \le y \le 1$. För godtyckliga tal $a > 0$ och $b > 1$ låt $\gamma_{a,b}$ beteckna rektangelkurvan med hörn i punkterna $(a,-b)$, (a,b), $(-a,b)$ och $(-a,-b)$ och genomlupen ett varv moturs. Låt nu $a > 0$ och $b > 1$ vara så små att $\gamma_{a,b}$ helt ligger innanför γ. Låt vidare M nu beteckna området mellan $\gamma_{a,b}$ och γ. Då gäller att $M \cup \gamma \cup \gamma_{a,b} \subset D$ och det följer av Greens formel och av (16) att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{-\gamma_{a,b}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{19}$$

$$= \iint_E (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_E 0\,dxdy = 0.$$

Vidare är

$$\int_{-\gamma_{a,b}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{\gamma_{a,b}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{20}$$

$$= \int_{-b}^{b} \frac{2ay}{a^2+(y^2-1)^2}\,dy - \int_{-a}^{a} -\frac{b^2-1}{x^2+(b^2-1)^2}\,dx - \int_{-b}^{b} \frac{-2ay}{a^2+(y^2-1)^2}\,dy$$
$$+ \int_{-a}^{a} -\frac{b^2-1}{x^2+(b^2-1)^2}\,dx$$
$$= 4\int_{-b}^{b} \frac{ay}{a^2+(y^2-1)^2}\,dy = 0,$$

där vi i sista likheten ovan använt att en udda funktion har integral 0 över ett intervall symmetriskt kring origo. Av (19) och (20) följer att $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ gäller även i detta fall. Villkoret (18) är således uppfyllt och följdaktligen är kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ oberoende av vägen för kurvor γ i D.

Vi övergår nu till området E. Låt nu γ vara rektangelkurvan med hörn i $(1,0)$, $(1,2)$, $(-1,2)$ och $(-1,0)$ genomlupen ett varv moturs. Då är γ en enkelt sluten positivt orienterad kurva i E och

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{2y}{1+(y^2-1)^2}\,dy - \int_{-1}^{1} -\frac{3}{x^2+9}\,dx - \int_0^2 \frac{-2y}{1+(y^2-1)^2}\,dy + \int_{-1}^{1} -\frac{-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= 4\int_0^2 \frac{y}{1+(y^2-1)^2}\,dy + \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+9}\,dx + + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx > 0,$$

eftersom samtliga integraler ovan uppenbarligen är > 0. Villkoret (18) med D utbytt mot E är således inte uppfyllt och följdaktligen är kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ inte oberoende av vägen för kurvor γ i E.

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.