MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
071219

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Avgör för var och en av serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2}$$

om serien konvergerar eller divergerar. 6 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $(1+x^3)y'' - 6xy = 0$ med bivillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 6 p

2. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$ där Y är den del av ytan $z = (x-z)^2 + (y-z)^2$ där $z \leq 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (x^2, y, z)$. 8 p

3. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + xy + y^2 = 1$ och $z^3 = 1 + x^2 + y^2$, med kurvans riktning sådan att kurvans projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Låt γ_2 vara den del av γ_1 där $x \geq 0$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (3x^2z - y^3)\, dx + (x^2 + z^3)\, dy + (x^3 + 3yz^2)\, dz$$

dels om $\Gamma = \gamma_1$ och dels om $\Gamma = \gamma_2$. 8 p

4. Låt funktionen $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$ vara sådan att $u''_{11}(x,y) + u''_{22}(x,y) = 0$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Låt a och b vara godtyckliga reella tal sådana att $0 < a < b$, och låt γ vara den positivt orienterade randen till området $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$. Sätt $v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ då $(x,y) \neq (0,0)$. Visa att

a) $v''_{11}(x,y) + v''_{22}(x,y) = 0$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$,

b) $\displaystyle\int_\gamma -u(x,y)v'_2(x,y)\, dx + u(x,y)v'_1(x,y)\, dy = \int_\gamma -v(x,y)u'_2(x,y)\, dx + v(x,y)u'_1(x,y)\, dy,$

c) $\displaystyle\int_\gamma -v(x,y)u'_2(x,y)\, dx + v(x,y)u'_1(x,y)\, dy = 0,$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(a\cos\theta, a\sin\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} u(b\cos\theta, b\sin\theta)\, d\theta.$ 8 p

5. Bestäm arean av den del av planet $z = x + 1$ som ligger innanför ytan $2x^2 + 2y^2 = 1 + z^2$. Bestäm också volymen av den del av området $2x^2 + 2y^2 \leq 1 + z^2$ som ligger mellan planen $z = x + 1$ och $z = x$. 8 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ då båda är konvergenta och divergenta samtidigt. 12 p

7. (Cauchys rotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att

$$|a_k|^{1/k} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 12 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning to 20/12 kl 9.45-10.00 i rum 315 hus 5, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.