Lösningar till Matematisk analys 4, 070823

1. a) Sätt

$$a_k = \frac{k^2+1}{k^3+1}, \quad b_k = (-1)^k \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \quad \text{och} \quad c_k = \frac{\sin(k^2)}{k^2} \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots .$$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är positiv. Vi har att

$$a_k = \frac{k^2+1}{k^3+1} \approx \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k} \quad \text{för stora } k$$

och mera precist att

$$a_k \Big/ \frac{1}{k} = \frac{k^2+1}{k^3+1} k = \frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^3}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1 \quad k \to \infty,$$

och eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är en divergent positiv standardserie följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är alternerande och $|b_k| = k^{-1/2} \ln k \to 0$ då $k \to \infty$. Vidare är $|b_k| = f(k)$ där $f(x) = x^{-1/2} \ln x$. Derivering ger $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-3/2}(2 - \ln x)$, och alltså är $f'(x) < 0$ om $x > e^2$. Funktionen $f(x)$ är således avtagande i intervallet $x > e^2$, och alltså är $|b_k| = f(k)$ avtagande i k för $k = 9, 10, \ldots$. Serien $\sum_{k=9}^{\infty} b_k$ konvergerar därför enligt Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier, och följaktligen konvergerar även $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

För serien $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ notera att

$$|c_k| = \frac{|\sin(k^2)|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots .$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är en konvergent positiv standardserie följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ konvergerar, och eftersom absolutkonvergens medför konvergens följer att även $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergerar.

b) I enlighet med problemtexten ansätter vi att

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \text{ och att } y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Insättning i givna differentialekvationen ger sedan att

$$(1) \qquad (1+x^3) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 6x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Men

$$(1+x^3) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x^3 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}}_{\text{Sätt } \ell = k-3} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} = \underbrace{\sum_{\ell=-1}^{\infty} (\ell+3)(\ell+2)a_{\ell+3}x^{\ell+1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} (k+3)(k+2)a_{k+3}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k+1} = 2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)a_{k+3} + k(k-1)a_k\big)x^{k+1}$$

och

$$6x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 6\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}.$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)a_{k+3} + \underbrace{(k(k-1)-6))}_{=(k+2)(k-3)}\, a_k\big)x^{k+1} = 0,$$

dvs vi har att

$$2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)a_{k+3} + (k+2)(k-3)a_k\big)x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att

$$2a_2 = 0 \quad \text{och} \quad (k+3)(k+2)a_{k+3} + (k+2)(k-3)a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots$$

och alltså att

$$a_2 = 0 \quad \text{och} \quad a_{k+3} = -\frac{k-3}{k+3}a_k \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots \quad \text{och} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots$$

samt $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$, får vi vidare att $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \ldots$ således att

(2) $$a_{k+3} = -\frac{k-3}{k+3}a_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

samt

$$a_1 = 1 \quad \text{och} \quad a_0 = a_2 = 0.$$

Av $a_0 = 0$ och $a_2 = 0$ samt (2) följer att

$$a_0 = a_3 = a_6 = \ldots = 0 \quad \text{och} \quad a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$$

dvs att

$$a_{3k} = a_{3k+2} = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Av $a_1 = 1$ och (2) följer att

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{-2}{4}\,a_1 = \frac{2}{1\cdot 4}, \\ a_7 &= -\frac{1}{7}\,a_3 = -\frac{2}{4\cdot 7} \\ a_{10} &= -\frac{5}{10}\,a_6 = (-1)^2\,\frac{2}{7\cdot 10}, \\ &\vdots, \end{aligned}$$

dvs att

$$a_{3k+1} = (-1)^{k+1}\frac{2}{(3k-2)(3k+1)} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \dots .$$

Notera här också att formeln för a_{3k+1} även stämmer för $k = 1$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{(3k-2)(3k+1)}x^{3k+1}. \tag{3}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{(3k-2)(3k+1)}x^{3k+1}$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{2}{\big(3(k+1)-2\big)\big(3(k+1)+1\big)}|x|^{3(k+1)+1} \cdot \frac{(3k-2)(3k+1)}{2}\frac{1}{|x|^{3k}} =$$

$$= \frac{3k-2}{3k+4}|x|^3 = \frac{1-\frac{2}{3k}}{1+\frac{4}{3k}}|x|^3 \to |x|^3 \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent om $|x|^3 < 1$ och divergent om $|x|^3 > 1$. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| > 1$, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie 1 (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen i intervallet $-1 < x < 1$).

2. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 1$ där $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ (dvs Y_1 är en cirkelskiva med radien 1). Ytan $Y \cup Y_1$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz. \tag{4}$$

På ytan Y_1 är $\mathbf{F} = (x^2, y, 1)$ och $\mathbf{N}_1 = (0, 0, 1)$. Dvs $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = 1$ på hela Y_1, och alltså är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} dS = \text{area } (Y_1) = \pi \cdot 1^2 = \pi. \tag{5}$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2$ och D är mängden $(x-z)^2 + (y-z)^2 \leq z$, $0 \leq z \leq 1$. Den undre gränsen för z i beskrivningen av D får vi av att

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 \leq z \quad \Longrightarrow \quad z \geq 0.$$

Vi får att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = 2\iiint_D (x+1)\, dxdydz = \tag{6}$$

$$= 2\int_0^1 \left(\iint_{(x-z)^2+(y-z)^2 \leq z} (x+1)\, dxdy\right) dz.$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

$$\iint_{(x-z)^2+(y-z)^2 \leq z} (x+1)\, dxdy = \tag{7}$$

(Gör substitutionen $u = x - z$, $v = y - z \Longleftrightarrow x = u + z$, $y = v + z$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1$, och $(x-z)^2 + (y-z)^2 \le z$ övergår i $u^2 + v^2 \le z$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le z} (u + z + 1)\, |1|\, dudv = \iint_{u^2+v^2\le z} (u + z + 1)\ dudv =$$

(Eftersom u är udda i u och området $u^2 + v^2 \le 4 - z^2$ är symmetriskt kring $u = 0$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le z} (z + 1)\ dudv = (z + 1) \iint_{u^2+v^2\le z} dudv =$$

$$= (z + 1)\,\text{area}\left(u^2 + v^2 \le z\right) = (z + 1)\pi \left(\sqrt{z}\right)^2 = \pi(z^2 + z)$$

Insättning av (7) i (6) ger att

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz = 2\pi \int_0^1 \left(z^2 + z\right)\, dz = 2\pi \left[\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{5\pi}{3}. \tag{8}$$

Av (4), (5) och (8) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \frac{5\pi}{3} - \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Ytan $z^3 = 1 + x^2 + y^2$ kan ekvivalent skrivas $z = (1 + x^2 + y^2)^{1/3}$. Vi beräknar de båda kurvintegralerna genom att använda Stokes sats.

Fallet $\Gamma = \gamma_1$. Låt Y_1 beteckna den del av ytan $z = (1 + x^2 + y^2)^{1/3}$ där $x^2 + xy + y^2 \le 1$. En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = (1 + u^2 + v^2)^{1/3}$, $u^2 + uv + v^2 \le 1$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, (1 + u^2 + v^2)^{1/3}\right)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = \left(1, 0, \frac{2u}{3(1 + u^2 + v^2)^{2/3}}\right), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(0, 1, \frac{2v}{3(1 + u^2 + v^2)^{2/3}}\right) \quad \text{och}$$

$$\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = \left(-\frac{2u}{3(1 + u^2 + v^2)^{2/3}}, -\frac{2v}{3(1 + u^2 + v^2)^{2/3}}, 1\right),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N_1}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_1. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_{\gamma_1} (3x^2z - y^3)\, dx + (x^2 + z^3)\, dy + (x^3 + 3yz^2)\, dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_1} \left(\nabla \times \left(3x^2z - y^3, x^2 + z^3, x^3 + 3yz^2\right)\right) \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} (0, 0, 2x + 3y^2) \cdot \mathbf{N}_1\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= + \iint_{u^2+uv+v^2\le 1} \left(0, 0, 2u + 3v^2\right) \cdot \left(-\frac{2u}{3(1 + u^2 + v^2)^{2/3}}, -\frac{2v}{3(1 + u^2 + v^2)^{2/3}}, 1\right) dudv =$$

$$= \iint_{u^2+uv+v^2\le 1} (2u + 3v^2)\, dudv =$$

(Vi har att $u^2+uv+v^2 \le 1 \iff \left(v+\frac{1}{2}u\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 \le 1$. Gör substitutionen $s = v + \frac{1}{2}u$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u \iff u = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, $v = s - \frac{1}{\sqrt{3}}t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, och $u^2+uv+v^2 \le 1$ övergår i $s^2+t^2 \le 1$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}t + 3\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^2)\right) \left|-\frac{2}{\sqrt{3}}\right| dsdt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2\le 1} \left(3s^2 + t^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}st + \frac{4}{\sqrt{3}}t\right) dsdt =$$

(Eftersom $-\frac{6}{\sqrt{3}}st + \frac{4}{\sqrt{3}}t$ är udda i t och området $s^2+t^2 \le 1$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2\le 1} \left(3s^2+t^2\right) dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2 \le 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2\le 1} \left(3\cdot\frac{1}{2}(s^2+t^2) + \frac{1}{2}(s^2+t^2)\right) dsdt = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2\le 1} \left(s^2+t^2\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$)

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r^2 r\, drd\theta = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 r^3\, dr = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Fallet $\Gamma = \gamma_2$. Kurvan γ_2 är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ_2 till en sluten kurva. Låt γ_3 vara kurvan $x = 0$, $z = (1+y^2)^{1/3}$, $-1 \le y \le 1$, från punkten $(0,-1,2^{1/3})$ till punkten $(0,1,2^{1/3})$. Låt också ytan Y_2 beteckna den del av ytan $z = (1+x^2+y^2)^{1/3}$ där $x^2+xy+y^2 \le 1$, $x \ge 0$. Kurvan $\gamma_2 \cup (-\gamma_3$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma_2 \cup (-\gamma_3)$ är randkurva till ytan Y_2. En parametrisering av ytan Y_2 är är $x = u$, $y = v$, $z = (1+u^2+v^2)^{1/3}$, $u^2+uv+v^2 \le 1$, $u \ge 0$. Låt $\mathbf{N_2}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_2. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_{\gamma_2} (3x^2z - y^3)\, dx + (x^2+z^3)\, dy + (x^3+3yz^2)\, dz + \tag{9}$$

$$+ \int_{-\gamma_3} (3x^2z - y^3)\, dx + (x^2+z^3)\, dy + (x^3+3yz^2)\, dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_2} \left(\nabla \times \left(3x^2z - y^3, x^2+z^3, x^3+3yz^2\right)\right) \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iint_{Y_2} (0,0,2x+3y^2) \cdot \mathbf{N}_2\, dS =$$

(Inför u och v och sedan s och t som i fallet $\Gamma = \gamma_1$. Notera att $u \ge 0$ övergår i $t \ge 0$)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ t\ge 0}} \left(3s^2 + t^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}st + \frac{4}{\sqrt{3}}t\right) dsdt =$$

(Eftersom $-\frac{6}{\sqrt{3}}st$ är udda i s och området $s^2+t^2 \le 1$, $t \ge 0$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ t\ge 0}} \left(3s^2 + t^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}t\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi}} \left(r^2\left(3\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \frac{4}{\sqrt{3}} r\sin\theta \right) r\,drd\theta =$$

(Eftersom $3\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\cos^2\theta + 1 = 1 + \cos 2\theta + 1 = 2 + \cos 2\theta$.)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi}} \left(2r^3 + r^3\cos 2\theta + \frac{4}{\sqrt{3}} r^2\sin\theta \right) drd\theta =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(2r^3 + r^3\cos 2\theta + \frac{4}{\sqrt{3}} r^2\sin\theta \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\left[2r^3\theta + r^3\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{4}{\sqrt{3}} r^2\cos\theta \right]_0^\pi \right) dr =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(2\pi r^3 + \frac{8}{\sqrt{3}} r^2 \right) dr = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}\pi r^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}} r^3 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{16}{9}.$$

En parametrisering av γ_3 är $x = 0$, $y = t$, $z = (1+t^2)^{1/3}$, $-1 \le t \le 1$, och den ger att

$$(10) \qquad \int_{-\gamma_3} (3x^2z - y^3)\,dx + (x^2 + z^3)\,dy + (x^3 + 3yz^2)\,dz =$$

$$= -\int_{\gamma_3} (3x^2z - y^3)\,dx + (x^2 + z^3)\,dy + (x^3 + 3yz^2)\,dz =$$

$$= -\int_{-1}^1 \left(0 + (1+t^2)\cdot 1 + 3t(1+t^2)^{2/3}\frac{1}{3}(1+t^2)^{-2/3}2t \right) dt =$$

$$= -\int_{-1}^1 (1 + 3t^2)\,dt = -\left[t + t^3\right]_{-1}^1 = -4.$$

Av (9) och (10) följer att

$$\int_{\gamma_2} (3x^2z - y^3)\,dx + (x^2 + z^3)\,dy + (x^3 + 3yz^2)\,dz = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{16}{9} + 4 = \frac{1}{9}(3\sqrt{3}\pi + 52).$$

Anmärkning. I räkningarna ovan används att $u^2 + uv + v^2 \le 1 \iff \left(v + \frac{1}{2}u\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 \le 1$, sedan sätts $s = v + \frac{1}{2}u$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u \iff u = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, $v = s - \frac{1}{\sqrt{3}}t$, och därefter införs polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$. Området $u^2 + uv + v^2 \le 1$, $u \ge 0$, övergår då i området $s^2 + t^2 \le 1$, $t \ge 0$, och därefter i $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$. Man kan också använda att $u^2 + uv + v^2 \le 1 \iff \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \le 1$, sedan sätta $s = u + \frac{1}{2}v$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}v \iff u = s - \frac{1}{\sqrt{3}}t$, $v = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, och därefter införa polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$. Området $u^2 + uv + v^2 \le 1$, $u \ge 0$, övergår då i området $s^2 + t^2 \le 1$, $t - \sqrt{3}s \le 0$, och därefter i $0 \le r \le 1$, $-\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$.

4. a) Derivering ger att

$$v_1'(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad v_{11}'' = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x\cdot 2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

för alla $(x,y) \ne (0,0)$, och på grund av symmetri har vi också att

$$v_{22}''(x,y) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

för alla $(x, y) \neq (0, 0)$, och alltså är $v''_{11}(x, y) + v''_{22}(x, y) = 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Låt D vara området $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$. Vi har att

$$\int_\gamma -uv'_2\,dx + uv'_1\,dy = \iint_D \big(D_1(uv'_1) - D_2(-uv'_2)\big)\,dxdy =$$

$$= \iint_D \big(D_1(uv'_1) + D_2(uv'_2)\big)\,dxdy = \iint_D \big(u'_1v'_1 + uv''_{11} + u'_2v'_2 + uv''_{22}\big)\,dxdy =$$

$$= \iint_D \big(u'_1v'_1 + u'_2v'_2 + u(v''_{11} + v''_{22})\big)\,dxdy = \iint_D \big(u'_1v'_1 + u'_2v'_2\big)\,dxdy.$$

I första likheten ovan har vi använt Greens formel, och i den sista likheten att $v''_{11} + v''_{22} = 0$ i D (följer av a) eftersom origo ligger utanför D). Eftersom även $u''_{11} + u''_{22} = 0$ i D (ty $u''_{11} + u''_{22} = 0$ i hela $\mathbf{R}^2$) har vi (byt plats på u och v i räkningen ovan) också att

$$\int_\gamma -vu'_2\,dx + vu'_1\,dy = \iint_D \big(u'_1v'_1 + u'_2v'_2\big)\,dxdy.$$

Således är

$$\int_\gamma -uv'_2\,dx + uv'_1\,dy = \int_\gamma -vu'_2\,dx + vu'_1\,dy = \left(\iint_D \big(u'_1v'_1 + u'_2v'_2\big)\,dxdy\right).$$

c) Låt γ_a vara cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ moturs, och låt γ_b vara cirkeln $x^2 + y^2 = b^2$ moturs. Vi har att

$$\int_\gamma -vu'_2\,dx + vu'_1\,dy = \int_{\gamma_b} -vu'_2\,dx + vu'_1\,dy - \int_{\gamma_a} -vu'_2\,dx + vu'_1\,dy =$$

$$= 2\ln b \int_{\gamma_b} -u'_2\,dx + u'_1\,dy - 2\ln a \int_{\gamma_a} -u'_2\,dx + u'_1\,dy =$$

$$= 2\ln b \iint_{x^2+y^2\leq b^2} \big(D_1u'_1 - D_2(-u'_2)\big)\,dxdy - 2\ln a \iint_{x^2+y^2\leq b^2} \big(D_1u'_1 - D_2(-u'_2)\big)\,dxdy =$$

$$= 2\ln b \iint_{x^2+y^2\leq b^2} \big(u''_1 + u''_2\big)\,dxdy - 2\ln a \iint_{x^2+y^2\leq b^2} \big(u''_1 + u''_2\big)\,dxdy = 0.$$

Första likheten ovan följer av att $\gamma = (-\gamma_a) \cup \gamma_b$, andra likheten av att $v(x, y) = \ln(a^2) = 2\ln a$ för alla $(x, y) \in \gamma_a$ och att $v(x, y) = \ln(b^2) = 2\ln b$ för alla $(x, y) \in \gamma_b$, tredje likheten av Greens formel, och femte likheten av att $u''_{11} + u''_{22} = 0$ i hela $\mathbf{R}^2$.

d) Tillsammans visar b) och c) att

$$\int_\gamma -u(x, y)v'_2(x, y)\,dx + u(x, y)v'_1(x, y)\,dy = 0.$$

Sätter vi där in att

$$v'_1(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad v'_2(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

ger det att

$$\int_\gamma -u(x, y)\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + u(x, y)\frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 0.$$

Använder vi sedan att $\gamma = (-\gamma_a) \cup \gamma_b$ $\big($där γ_a och γ_b är som i c)$\big)$, följer att

$$\int_{\gamma_b} -u(x, y)\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + u(x, y)\frac{x}{x^2 + y^2}\,dy - \int_{\gamma_a} -u(x, y)\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + u(x, y)\frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 0,$$

eller ekvivalent

$$\int_{\gamma_b} -u(x,y)\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + u(x,y)\frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_{\gamma_a} -u(x,y)\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + u(x,y)\frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Inför vi sedan parametriseringen $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ av γ_a, och parametriseringen $x = b\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ av γ_b, får vi att

$$\int_0^{2\pi} \left(-u(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a\sin\theta}{a^2}(-a\sin\theta) + u(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a\cos\theta}{a^2}a\cos\theta \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-u(b\cos\theta, b\sin\theta)\frac{b\sin\theta}{b^2}(-b\sin\theta) + u(b\cos\theta, b\sin\theta)\frac{b\cos\theta}{b^2}b\cos\theta \right) d\theta,$$

som med $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ för alla θ ger att

$$\int_0^{2\pi} u(a\cos\theta, a\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} u(b\cos\theta, b\sin\theta)\,d\theta.$$

5. Först beräknar vi sökt area. Insättning av $z = x+1$ i $2x^2+2y^2 = 1+z^2$ ger $2x^2+2y^2 = 1+(x+1)^2$ $\iff x^2-2x+2y^2 = 2 \iff (x-1)^2+2y^2 = 3$. Sökt area är alltså arean av $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, där $f(x,y) = x+1$ och D är $(x-1)^2+2y^2 \le 3$. Enligt formeln för arean av en funktionsyta $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, får vi att sökt area är

$$\iint_D \sqrt{\left(f_1'(x,y)\right)^2 + \left(f_2'(x,y)\right)^2 + 1}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1^2+0^2+1}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_{(x-1)^2+2y^2\le 3} dxdy =$$

(Gör substitutionen $u = x-1$, $v = \sqrt{2}y \iff x = u+1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}v$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(x-1)^2+2y^2 \le 3$ övergår i $u^2+v^2 \le 3$.)

$$= \sqrt{2}\iint_{u^2+v^2\le 3} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dudv = \iint_{u^2+v^2\le 3} dudv = \text{area}\left(u^2+v^2 \le 3\right) = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi.$$

Vi beräknar nu sökt volym. Sökt volym är volymen av området Ω, där Ω är området $2x^2+2y^2 \le 1+z^2$, $x \le z \le x+1 \iff 2x^2+2y^2 \le 1+z^2$, $0 \le z-x \le 1$. Vi använder att $\text{vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz$ och gör variabelsubsttutionen $u = x$, $v = y$, $w = z-x \iff x = u$, $y = v$, $z = u+w$. Substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = 1$ som en enkel räkning visar, och $(x,y,z) \in \Omega$ övergår i $(u,v,w) \in \Omega'$ där Ω' är området $2u^2+2v^2 \le 1+(u+w)^2$, $0 \le w \le 1 \iff u^2-2uw+2v^2 \le 1+w^2$, $0 \le w \le 1 \iff$ $(u-w)^2+2v^2 \le 1+2w^2$, $0 \le w \le 1$. Vi får att

$$\text{vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\Omega'} |1|\,dudvdw = \tag{11}$$

$$= \iiint_{\Omega'} dudvdw = \int_0^1 \left(\iint_{(u-w)^2+2v^2\le 1+2w^2} dudv \right) dw.$$

I dubbelintegralen ovan gör vi för varje fixt w substitutionen $s = u-w$, $t = \sqrt{2}v \iff u = s+w$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}t$. Substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(u-w)^2+2v^2 \le 1+2w^2$ övergår i $s^2+t^2 \le 1+2w^2$. Det följer att

$$\iint_{(u-w)^2+2v^2\le 1+2w^2} dudv = \iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} dsdt = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{area}\left(s^2 + t^2 \le 1 + 2w^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi \left(\sqrt{1 + 2w^2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 + 2w^2).$$

Av (11) och (12) får vi att

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1 + 2w^2)\, dw = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[w + \frac{2}{3}w^3\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.