MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
080115

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Avgör för var och en av de generaliserade integralerna

$$\int_1^\infty \frac{x^6+1}{x^8+1}\,dx, \quad \int_1^\infty x^2\sin(x^3)\,dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty x\sin(x^3)\,dx$$

om den generaliserade integralen konvergerar eller divergerar. 6 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $xy'' + xy' + y = 0$ med bivillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 6 p

2. Visa att kurvintegralen

$$\int_\gamma (y^3z^2 + 2xy + 1)\,dx + (3xy^2z^2 + x^2 + z)\,dy + (2xy^3z + y)\,dz$$

är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$, och bestäm kurvintegralens värde då γ är en kurva från punkten $(1,-1,1)$ till punkten $(-3,2,-1)$. 8 p

3. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{y+1}{x^2-(y+1)^2}\,dx + \left(\frac{x}{x^2-(y+1)^2} + x^3\right)dy$$

där γ är kurvan $(x-4)^2 + 2y^2 = 1$, $y \geq 0$, från punkten $(3,0)$ till punkten $(5,0)$. 8 p

4. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan ytan $x^2 + (y+z)^2 + z^2 = 1$ och planet $z = x$, med kurvans riktning sådan att kurvans projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Låt γ_2 vara den del av γ_1 där $x \geq 0$, $y \geq 0$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (z^3 + 2yz^5)\,dx + (x^3 + z^6)\,dy + 4yz^5\,dz$$

dels om $\Gamma = \gamma_1$ och dels om $\Gamma = \gamma_2$. 8 p

5. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{3xy^2z}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{3y^3z}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{-x^2y^2-y^4+2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right),$$

definierat då $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Visa att divergensen av $\mathbf{F}(x,y,z)$ är 0 för alla $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Beräkna också ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ där $z \geq 0$, och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y. 8 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden i rummet med *en* under- och *en* översida, *en* vänster- och *en* högersida och *en* bak- och *en* framsida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mera allmänna områden i rummet. 12 p

7. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ då båda är konvergenta och divergenta samtidigt.

12 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning on 16/1 kl 9.30-9.45 i rum 328 hus 6, därefter hos Tom Wollecki i rum 208 hus 6.