Lösningar till Matematisk analys 4, 080115

1. a) Alla tre generaliserade integraler är generaliserade enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞.

Den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^6+1}{x^8+1}\,dx$:
Integralen är positiv. Vi har att

$$\frac{x^6+1}{x^8+1}\bigg/\frac{1}{x^2} = \frac{1+\frac{1}{x^6}}{1+\frac{1}{x^8}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1 \quad \text{då} \quad x\to\infty,$$

och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

är en konvergent positiv generaliserad standardintegral, så

$$\int_1^\infty \frac{x^6+1}{x^8+1}\,dx$$

är konvergent enligt jämförelsekriterium för positiva integraler.

Den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty x^2\sin(x^3)\,dx$:
Vi har att

$$\int_1^T x^2\sin(x^3)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(x^3)\right]_1^T = \frac{1}{3}\left(\cos 1 - \cos(T^3)\right),$$

som saknar ändligt gränsvärde då $T\to\infty$ (eftersom $\cos(T^3)$ oscillerar mellan -1 och 1 då T växer mot ∞), så

$$\int_1^\infty x^2\sin(x^3)\,dx$$

är divergent.

Den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty x\sin(x^3)\,dx$:
Gör substitutionen $u=x^3$. Då är $x=u^{1/3}$, $\frac{dx}{du}=\frac{1}{3}u^{-2/3}$, $dx=\frac{1}{3}u^{-2/3}\,du$, $x=1$ ger $u=1$, $x\to\infty$ ger $u\to\infty$, och vi får att

$$\int_1^\infty x\sin(x^3)\,dx = \int_1^\infty u^{1/3}(\sin u)\,\frac{1}{3}u^{-2/3}\,du = \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\sin u}{u^{1/3}}\,du. \tag{1}$$

Partiell integration ger att

$$\int_1^T \frac{\sin u}{u^{1/3}}\,du = \int_1^T (\sin u)\,\frac{1}{u^{1/3}}\,du = \left[(-\cos u)\,\frac{1}{u^{1/3}}\right]_1^T - \int_1^T (-\cos u)\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{u^{4/3}}\right)du =$$

$$= \cos 1 - \frac{\cos T}{T^{1/3}} - \frac{1}{3}\int_1^T \frac{\cos u}{u^{4/3}}\,du,$$

och eftersom $\dfrac{\cos T}{T^{1/3}} \to 0$ då $T \to \infty$ följer att

$$\int_1^T \frac{\sin u}{u^{1/3}}\,du \text{ har ändligt gränsvärde då } T \to \infty \iff \int_1^T \frac{\cos u}{u^{4/3}}\,du \text{ har ändligt gränsvärde då } T \to \infty,$$

och följaktligen gäller att

$$\int_1^\infty \frac{\sin u}{u^{1/3}}\,du \quad \text{är konvergent} \quad \iff \quad \int_1^\infty \frac{\cos u}{u^{4/3}}\,du \quad \text{är konvergent.} \tag{2}$$

Det gäller vidare att

$$\left|\frac{\cos u}{u^{4/3}}\right| \le \frac{1}{u^{4/3}} \quad \text{för alla} \quad u \ge 1 \tag{3}$$

och att

$$\int_1^\infty \frac{1}{u^{4/3}}\,du \quad \text{är en konvergent positiv generaliserad standardintegral.} \tag{4}$$

Av (3), (4) och jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos u}{u^{4/3}}\right|\,du$$

är konvergent, och eftersom absolutkonvergens medför konvergens fås sedan att

$$\int_1^\infty \frac{\cos u}{u^{4/3}}\,du$$

är konvergent, vilket tillsammans med (1) och (2) visar att

$$\int_1^\infty x\sin(x^3)\,dx$$

är konvergent.

b) I enlighet med problemtexten ansätter vi att

$$y = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^\infty k a_k x^{k-1} \text{ och att } y'' = \sum_{k=0}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2}.$$

Insättning i givna differentialekvationen ger sedan att

$$x\sum_{k=0}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2} + x\sum_{k=0}^\infty k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^\infty a_k x^k = 0. \tag{5}$$

Men

$$x\sum_{k=0}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^\infty k(k-1)a_k x^{k-1} = \underbrace{\sum_{k=1}^\infty k(k-1)a_k x^{k-1}}_{\text{Sätt } \ell = k-1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\ell a_{\ell+1}x^{\ell}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)ka_{k+1}x^{k}$$

och

$$x\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k.$$

Sambandet (5) kan därför skrivas

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big((k+1)ka_{k+1}+(k+1)a_k\big)x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att

$$(k+1)ka_{k+1}+(k+1)a_k = 0 \quad \text{för} \quad k=0,1,\ldots$$

och alltså att

$$a_0 = 0 \quad \text{samt} \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k}a_k \quad \text{för} \quad k=1,2,\ldots\ .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k = a_0+a_1x+\ldots \quad \text{och} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1} = a_1+2a_2x+\ldots$$

samt $y(0)=0$ och $y'(0)=1$, får vi vidare att $a_0=0$ (som vi redan vet måste gälla) och $a_1=1$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0,a_1,\ldots$ således att

(6)
$$a_{k+1} = -\frac{1}{k}a_k, \quad k=1,2,\ldots$$

samt

$$a_0 = 0 \quad \text{och} \quad a_1 = 1.$$

Av $a_1=1$ och (6) följer att

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_1 = -1,\\
a_3 &= -\frac{1}{2}\,a_2 = (-1)^2\,\frac{1}{2}\\
a_4 &= -\frac{1}{3}\,a_3 = (-1)^3\,\frac{1}{2\cdot 3},\\
&\ \vdots\ ,
\end{aligned}$$

dvs att

$$a_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!} \quad \text{för} \quad k=2,3,\ldots\ .$$

Notera här också att formeln för a_k även stämmer för $k=1$. Den sökta potensserielösningen är alltså

(7)
$$y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,x^k.$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,x^k$$

Då gäller för $x\neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{1}{k!}\,|x|^{k+1}\cdot(k-1)!\,\frac{1}{|x|^k} = \frac{|x|}{k} \to 0 \quad \text{då} \quad k\to\infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (7) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för alla x, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen på hela räta linjen. Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\, x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\, x^{k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-x)^k$$

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u^k$$

så är den erhållna lösningen $y(x) = xe^{-x}$.

2. Sätt $\mathbf{F} = (y^3z^2 + 2xy + 1, 3xy^2z^2 + x^2 + z, 2xy^3z + y)$, så att den givna kurvintegralen är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$. Eftersom $\mathbf{R}^3$ är en öppen, bågvis och enkelt sammanhängande mängd är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$ precis om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i hela $\mathbf{R}^3$. Vi har att $\nabla \times \mathbf{F} = (G_1, G_2, G_3)$, där

$$G_1 = D_y(2xy^3z + y) - D_z(3xy^2z^2 + x^2 + z) = 6xy^2z + 1 - (6xy^2z + 1) = 0,$$

$$G_2 = -\big(D_x(2xy^3z + y) - D_z(y^3z^2 + 2xy + 1)\big) = -\big(2y^3z - 2y^3z\big) = 0,$$

$$G_3 = D_x(3xy^2z^2 + x^2 + z) - D_y(y^3z^2 + 2xy + 1) = 3y^2z^2 + 2x - (3y^2z^2 + 2x) = 0,$$

så $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i hela $\mathbf{R}^3$, och alltså är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$.

Vi beräknar nu kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ där γ är en kurva från punkten $(1, -1, 1)$ till punkten $(-3, 2, -1)$. Eftersom $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är oberoende av vägen spelar det ingen roll vilken sådan kurva γ vi väljer. För att få en enkel beräkning väljer vi $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, där γ_1 är räta linjen från punkten $(1, -1, 1)$ till punkten $(-3, -1, 1)$, γ_2 är räta linjen från punkten $(-3, -1, 1)$ till punkten $(-3, 2, 1)$ och γ_3 är räta linjen från punkten $(-3, 2, 1)$ till punkten $(-3, 2, -1)$. En parametrisering av $-\gamma_1$ är $(x, y, z) = (t, -1, 1)$ där $-3 \leq t \leq 1$, en parametrisering av γ_2 är $(x, y, z) = (-3, t, 1)$ där $-1 \leq t \leq 2$, och en parametrisering av $-\gamma_3$ är $(x, y, z) = (-3, 2, t)$ där $-1 \leq t \leq 1$. Med hjälp av dessa parametriseringar får vi för den valda kurvan $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ från punkten $(1, -1, 1)$ till punkten $(-3, 2, -1)$ att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\int_{-\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} - \int_{-\gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} =$$

$$= -\int_{-3}^{1} (-2t)\, dt + \int_{-1}^{2} (-9t^2 + 10)\, dt - \int_{-1}^{1} (-48t + 2)\, dt =$$

$$= -\big[-t^2\big]_{-3}^{1} + \big[-3t^3 + 10t\big]_{-1}^{2} - \big[-24t^2 + 2t\big]_{-1}^{1} = -9$$

Anmärkning. Vi kan också visa att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$ genom att visa att det finns en potential till $\mathbf{F}$ i hela $\mathbf{R}^3$, dvs genom att visa att det finns en funktion φ sådan att $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ i hela $\mathbf{R}^3$. Lite räkning visar att

$$\varphi(x, y, z) = xy^3z^2 + x^2y + x + yz$$

är en sådan funktion, och alltså är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Om γ är en kurva från punkten $(1, -1, 1)$ till punkten $(-3, 2, -1)$ får vi också med hjälp av denna potential att då är

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \varphi(-3, 2, -1) - \varphi(1, -1, 1) = -5 - 4 = -9.$$

3. Sätt

$$P(x,y) = -\frac{y+1}{x^2-(y+1)^2} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2-(y+1)^2} + x^3.$$

Vi använder Greens formel för att beräkna den givna kurvintegralen. Eftersom γ inte är en sluten kurva måste vi då först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Låt Γ vara x-axeln från punkten $(3,0)$ till punkten $(5,0)$, och låt D vara området $(x-4)^2+2y^2 \le 1$, $y \ge 0$. Greens formel ger då att

$$\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men $\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$ och $Q_1' - P_2' = 3x^2$. Vi får att

(8) $$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy - 3\iint_D x^2\,dxdy.$$

En parametrisering av Γ är $x=t$, $y=0$, $3 \le t \le 5$, och den ger att

(9) $$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_3^5 -\frac{1}{t^2-1}\,dt = -\frac{1}{2}\int_3^5 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln|t-1| - \ln|t+1|\Big]_3^5 = -\frac{1}{2}\left(\ln 4 - \ln 6 - (\ln 2 - \ln 4)\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Vidare har vi att

(10) $$\iint_D x^2\,dxdy = \iint_{(x-4)^2+2y^2 \le 1,\, y \ge 0} x^2\,dxdy =$$

(Gör substitutionen $u = x-4$, $v = \sqrt{2}y \iff x = u+4$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}v$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(x-4)^2+2y^2 \le 1$, $y \ge 0$ övergår i $u^2+v^2 \le 1$, $v \ge 0$.)

$$= \iint_{u^2+v^2 \le 1,\, v \ge 0} (u+4)^2 \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dudv = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{u^2+v^2 \le 1,\, v \ge 0} (u^2+8u+16)\,dudv =$$

(Eftersom $8u$ är udda i u och området $u^2+v^2 \le 1$, $v \ge 0$ är symmetriskt kring $u=0$.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{u^2+v^2 \le 1,\, v \ge 0} (u^2+16)\,dudv =$$

(Inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi}} \left(r^2\cos^2\theta + 16\right) r\,dr\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left(r^3\cos^2\theta + 16r\right)\,dr\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \left(\left[\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta + 8r^2\right]_{r=0}^{r=1}\right) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}cos^2\theta + 8\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) + 8\right) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{16} \int_0^{\pi} (65 + \cos 2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\left[65\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right] = \frac{65\sqrt{2}\pi}{16}$$

Insättning av (9) och (10) i (8) ger att

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = -\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{195\sqrt{2}\pi}{16}.$$

4. Vi beräknar de båda kurvintegralerna genom att använda Stokes sats.

Fallet $\Gamma = \gamma_1$. Vi bestämmer först skärningen mellan ytan $x^2 + (y+z)^2 + z^2 = 1$ och planet $z = x$. Sambandet $z = x$ från planets ekvation ger insatt i ytans ekvation att $x^2 + (y+x)^2 + x^2 = 1$, dvs $2x^2 + (x+y)^2 = 1$. Skärningen är alltså kurvan bestående av alla (x, y, z) sådana att $z = x$ och $2x^2 + (x+y)^2 = 1$. Kurvan γ_1 är denna kurva med riktning sådan att kurvans projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Låt Y_1 beteckna den del av ytan $z = x$ där $2x^2 + (x+y)^2 \leq 1$. Kurvan γ_1 är då randkurva till ytan Y_1. En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = u$, $2u^2 + (u+v)^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,1), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (-1,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N_1}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_1. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_{\gamma_1} (z^3 + 2yz^5)\,dx + (x^3 + z^6)\,dy + 4yz^5\,dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_1} \left(\nabla \times \left(z^3 + 2yz^5, x^3 + z^6, 4yz^5\right)\right) \cdot \mathbf{N}_1\,dS = \iint_{Y_1} \left(-2z^5, 3z^2 + 10yz^4, 3x^2 - 2z^5\right) \cdot \mathbf{N}_1\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= + \iint_{2u^2+(u+v)^2 \leq 1} \left(-2u^5, 3u^2 + 10u^4v, 3u^2 - 2u^5\right) \cdot (-1,0,1)\,dudv =$$

$$= 3 \iint_{2u^2+(u+v)^2 \leq 1} u^2\,dudv =$$

(Gör substitutionen $s = \sqrt{2}u$, $t = u + v \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}}s$, $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}s + t$,
substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $2u^2 + (u+v)^2 \leq 1$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 1$.)

$$= 3 \iint_{s^2+t^2 \leq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2 \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4} \iint_{s^2+t^2 \leq 1} s^2\,dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4} \iint_{s^2+t^2 \leq 1} \frac{1}{2}(s^2 + t^2)\,dsdt = \frac{3\sqrt{2}}{8} \iint_{s^2+t^2 \leq 1} (s^2 + t^2)\,dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$)

$$= \frac{3\sqrt{2}}{8} \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} r^2\,r\,drd\theta = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^1 r^3\,dr = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$$

Fallet $\Gamma = \gamma_2$. Kurvan γ_2 är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ_2 till en sluten kurva. Låt γ_3 vara skärningskurvan i $2x^2 + (x+y)^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ mellan planet $z = x$ och yz-planet och låt γ_4 vara skärningskurvan i $2x^2 + (x+y)^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ mellan planet $z = x$ och xz-planet, samt låt γ_3:s riktning vara sådan att y växer när γ_3 genomlöps och låt γ_4:s riktning vara sådan att x växer när γ_4 genomlöps. Som lätt ses är γ_3 räta linjen från $(0,0,0)$ till punkten $(0,1,0)$, och γ_4 är räta linjen från $(0,0,0)$ till punkten $(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}})$. Låt också Y_2 vara den del av planet $z=x$ där $2x^2+(x+y)^2\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$. Kurvan $\gamma_2\cup(-\gamma_3)\cup\gamma_4$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma_2\cup(-\gamma_3)\cup\gamma_4$ är randkurva till ytan Y_2. En parametrisering av ytan Y_2 är $x=u$, $y=v$, $z=u$, $2u^2+(u+v)^2\leq 1$, $u\geq 0$, $v\geq 0$. Låt $\mathbf{N_2}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_2. Med dessa beteckningar har vi att

$$\text{(11)}\qquad \int_{\gamma_2}(z^3+2yz^5)\,dx+(x^3+z^6)\,dy+4yz^5\,dz+\int_{-\gamma_3}(z^3+2yz^5)\,dx+(x^3+z^6)\,dy+4yz^5\,dz+$$

$$+\int_{\gamma_4}(z^3+2yz^5)\,dx+(x^3+z^6)\,dy+4yz^5\,dz=$$

(Enligt Stokes sats.)

$$=\iint_{Y_1}\left(\nabla\times\left(z^3+2yz^5,x^3+z^6,4yz^5\right)\right)\cdot\mathbf{N}_1\,dS=\iint_{Y_1}(-2z^5,3z^2+10yz^4,3x^2-2z^5)\cdot\mathbf{N}_1\,dS=$$

(Inför u och v och sedan s och t som i fallet $\Gamma=\gamma_1$.
Notera att $u\geq 0$ övergår i $s\geq 0$, och att $v\geq 0$ övergår i $t\geq\frac{1}{\sqrt{2}}s$.)

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}\iint_{\substack{s^2+t^2\leq 1\\ s\geq 0,\ t\geq\frac{1}{\sqrt{2}}s}}s^2\,dsdt=$$

(Inför polära koordinater $s=r\cos\theta$, $t=r\sin\theta$, och notera att $s^2+t^2\leq 1$, $s\geq 0$, $t\geq\frac{1}{\sqrt{2}}s$ övergår i $0\leq r\leq 1$, $\alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, där $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ är den vinkel för vilken $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.)

$$=\frac{3\sqrt{2}}{8}\iint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ \alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}}r^2\cos^2\theta\,r\,drd\theta=\frac{3\sqrt{2}}{8}\iint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ \alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}}r^3\cos^2\theta\,drd\theta=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{16}\iint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ \alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}}r^3(1+\cos 2\theta)\,drd\theta=\frac{3\sqrt{2}}{16}\int_0^1 r^3\,dr\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{16}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{64}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)=\frac{3\sqrt{2}}{64}\arctan\sqrt{2}-\frac{1}{32}.$$

I sista likheten ovan har vi använt att om $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ är den vinkel för vilken $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ så är

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\arctan\sqrt{2},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\quad\text{och}\quad\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

vilket lätt inses med hjälp av en rätvinklig triangel med kateterna 1 och $\sqrt{2}$. Vi har också använt att $\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$.

En parametrisering av γ_3 är $x=0$, $y=t$, $z=0$, $0\leq t\leq 1$, och den ger att

$$\text{(12)}\qquad \int_{-\gamma_3}(z^3+2yz^5)\,dx+(x^3+z^6)\,dy+4yz^5\,dz=$$

$$-\int_{\gamma_3}(z^3+2yz^5)\,dx+(x^3+z^6)\,dy+4yz^5\,dz=-\int_0^1 0\,dt=0.$$

En parametrisering av γ_4 är $x=t$, $y=0$, $z=t$, $0\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$, och den ger att

$$\text{(13)}\qquad \int_{\gamma_4}(z^3+2yz^5)\,dx+(x^3+z^6)\,dy+4yz^5\,dz=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{36}.$$

Av (11), (12) och (13) följer att

$$\int_{\gamma_2} (z^3 + 2yz^5)\, dx + (x^3 + z^6)\, dy + 4yz^5\, dz = \frac{3\sqrt{2}}{64} \arctan \sqrt{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{36} = \frac{3\sqrt{2}}{64} \arctan \sqrt{2} - \frac{17}{288}.$$

5. Divergensen av $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} = D_x \big(3xy^2z(x^2+y^2+z^2)^{-4}\big) \\
+ D_y \big(3y^3z(x^2+y^2+z^2)^{-4}\big) \\
+ D_z \big((-x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-4}\big) = \\
= 3y^2z(x^2+y^2+z^2)^{-4} + 3xy^2z(-4)(x^2+y^2+z^2)^{-5}2x \\
+ 9y^2z(x^2+y^2+z^2)^{-4} + 3y^3z(-4)(x^2+y^2+z^2)^{-5}2y \\
+ 4y^2z(x^2+y^2+z^2)^{-4} + (-x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2)(-4)(x^2+y^2+z^2)^{-5}2z = \\
= (-21x^2y^2z + 3y^4z + 3y^2z^3)(x^2+y^2+z^2)^{-5} \\
+ (9x^2y^2z - 15y^4z + 9y^2z^3)(x^2+y^2+z^2)^{-5} \\
+ (12x^2y^2z + 12y^4z - 12y^2z^3)(x^2+y^2+z^2)^{-5} = 0
\end{aligned}$$

för alla $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Vi beräknar nu den givna ytintegralen. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 0$ där $3x^2 + 3y^2 \geq 1$ och $2x^2 + 3y^2 \leq 1$, och låt Y_2 vara den del av ytan $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 1$ där $z \geq 0$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den nedåtriktade enhetsnormalen till Y_1, och låt $\mathbf{N}_2$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_2. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{N}_2)\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz,$$

och eftersom $\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i hela $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ och $(0, 0, 0)$ ligger utanför D är trippelintegralen ovan 0 och det följer att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = -\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS. \tag{14}$$

En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = 0$, där $3u^2 + 3v^2 \geq 1$ och $2u^2 + 3v^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r}(u, v) = \big(u, v, 0\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u, v) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2'(u, v) = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v) = (0, 0, 1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} \left(\frac{3xy^2z}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{3y^3z}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{-x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^4} \right) \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \tag{15}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= -\iint_{\substack{3u^2+3v^2 \geq 1, \\ 2u^2+3v^2 \leq 1}} \left(0, 0, \frac{-u^2v^2 - v^4}{(u^2+v^2)^4}\right) \cdot (0, 0, 1)\; dudv = \iint_{\substack{3u^2+3v^2 \geq 1, \\ 2u^2+3v^2 \leq 1}} \frac{v^2}{(u^2+v^2)^3}\, dudv =$$

(Inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, och notera att $3u^2 + 3v^2 \geq 1$, $2u^2 + 3v^2 \leq 1$ övergår i $3r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta \geq 1$, $2r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta \leq 1$ $0 \leq \theta < 2\pi$, dvs i $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{3 - \cos^2\theta}}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.)

$$= \iint_{\substack{\frac{1}{\sqrt{3}} \le r \le \frac{1}{\sqrt{3-\cos^2\theta}} \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \frac{r^2 \sin^2\theta}{(r^2)^3} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3-\cos^2\theta}}} \frac{1}{r^3}\,dr \right) \sin^2\theta\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{r=\frac{1}{\sqrt{3-\cos^2\theta}}} \right) \sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\,d\theta =$$

(Använd att $\cos^2\theta \sin^2\theta = (\cos\theta\sin\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta =$
$= \frac{1}{4}(1-\cos^2 2\theta) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\theta$.)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8}\theta - \frac{1}{32}\sin 4\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

På ytan Y_2 är $x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{3}$, och alltså är $\mathbf{F}(x,y,z) = 81(3xy^2z, 3y^3z, -x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2)$ för alla $(x,y,z) \in Y_2$. Om vi sätter $\mathbf{G}(x,y,z) = (3xy^2z, 3y^3z, -x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2)$ gäller alltså att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\,dS = 81 \iint_{Y_2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}_2\,dS. \tag{16}$$

Av (14), (15) och (16) följer att

$$\iint_{Y} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = -\frac{\pi}{8} + 81 \iint_{Y_2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}_2\,dS. \tag{17}$$

Ytintegralen i högerledet av (17) kan beräknas med divergenssatsen. Låt Y_3 vara den del av planet $z=0$ där $x^2+y^2 \le \frac{1}{3}$. Ytan $Y_2 \cup Y_3$ är då en sluten yta. Låt E vara den mängd som ytan $Y_2 \cup Y_3$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_3$ vara den nedåtriktade enhetsnormalen till Y_3. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}_2\,dS + \iint_{Y_3} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}_3\,dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{G}\,dxdydz. \tag{18}$$

En parametrisering av ytan Y_3 är $x=u$, $y=v$, $z=0$, där $u^2+v^2 \le \frac{1}{3}$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u,v,0\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}'_1(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}'_2(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}'_1(u,v) \times \mathbf{r}'_2(u,v) = (0,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}'_1(u,v) \times \mathbf{r}'_2(u,v)$ till Y_3 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_3} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}_3\,dS = \iint_{Y_3} (3xy^2z, 3y^3z, -x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2) \cdot \mathbf{N}_3\,dS = \tag{19}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_3.)

$$= -\iint_{u^2+v^2 \le \frac{1}{3}} \big(0,0,-u^2v^2 - v^4\big) \cdot (0,0,1)\,dudv = \iint_{u^2+v^2 \le \frac{1}{3}} \big(u^2+v^2\big) v^2\,dudv =$$

(Eftersom området $u^2+v^2 \le \frac{1}{3}$ är symmetriskt i u och v.)

$$= \iint_{u^2+v^2 \le \frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Big(\big(u^2+v^2\big) v^2 + \big(v^2+u^2\big) u^2 \Big)\,dudv = \frac{1}{2} \iint_{u^2+v^2 \le \frac{1}{3}} \big(u^2+v^2\big)^2\,dudv =$$

(Inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$.)

$$= \frac{1}{2}\iint_{\substack{0\le r\le \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0\le\theta<2\pi}} (r^2)^2\, r\, dr\, d\theta = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r^5\, dr = \pi \left[\frac{1}{6} r^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{162}.$$

Vidare är $\nabla\cdot\mathbf{G} = 3y^2z + 9y^2z + 4y^2z = 16y^2z$ och vi får att

$$\iiint_E \nabla\cdot\mathbf{G}\, dxdydz = 16\iiint_E y^2 z\, dxdydz = 16\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\iint_{x^2+y^2\le\frac{1}{3}-z^2} y^2 z\, dxdy\right) dz. \tag{20}$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

$$\iint_{x^2+y^2\le\frac{1}{3}-z^2} y^2 z\, dxdy = \tag{21}$$

(Eftersom området $x^2+y^2\le\frac{1}{3}-z^2$ är symmetriskt i x och y.)

$$= \iint_{x^2+y^2\le\frac{1}{3}-z^2} \frac{1}{2}(x^2+y^2)z\, dxdy = \frac{1}{2}z\iint_{x^2+y^2\le\frac{1}{3}-z^2} (x^2+y^2)\, dxdy =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.)

$$= \frac{1}{2}z\iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{\frac{1}{3}-z^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} r^2\, r\, dr\, d\theta = \pi z\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}-z^2}} r^3\, dr = \pi z\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{\frac{1}{3}-z^2}} = \frac{\pi}{4}z\left(\frac{1}{3}-z^2\right)^2.$$

Insättning av (21) i (20) ger att

$$\iiint_E \nabla\cdot\mathbf{G}\, dxdydz = 4\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} z\left(\frac{1}{3}-z^2\right)^2 dz = 4\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{9}z - \frac{2}{3}z^3 + z^5\right) dz = \tag{22}$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{18}z^2 - \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\pi}{81}.$$

Insättning av (19) och (22) i (18) ger sedan att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{G}\cdot\mathbf{N}_2\, dS = -\frac{\pi}{162} + \frac{2\pi}{81} = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{81}. \tag{23}$$

Av (17) och (23) får vi därefter slutligen att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = -\frac{\pi}{8} + 81\cdot\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{81} = -\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{8}.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.