MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
080527

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna volymen av området $K = \{(x, y, z) : |x| + |y| + z^4 \leq 1\}$. 5 p

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma (2y + \sin 2y)\, dx - 4x \sin^2 y\, dy,$$
där γ är den del av ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ som ligger i första kvadranten, genomlupen från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 2)$. 5 p

3. Avgör om vektorfältet $\mathbf{F} = (axy+2z, x^2+2yz, y^2+bx)$ är ett potentialfält i $\mathbb{R}^3$ för några värden på konstanterna a och b. Bestäm i förekommande fall en potential. 5 p

4. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$
där $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 1)$, Y är ytan $\{x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, z \geq 0\}$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som har positiv z-komponent. 5 p

5. a) Avgör om följande generaliserade integral konvergerar:
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx.$$
2 p

   b) Summera serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+3)2^{k+1}x^k,$$
samt ange dennas konvergensintervall. 3 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden i rummet med en under- och en översida, en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 5 p

7. Bevisa Cauchys rotkriterium för serier: Antag att $|a_k|^{1/k} \to A$ när $k \to \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning fredagen den 30 maj kl 10.00 i sal 22, därefter hos Tom Wollecki, rum 208, hus 6.