Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2008-05-27.

1.

Volymen kan skrivas som en itererad integral som följer:

$$V = \iiint_K 1\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\left(\iint_{D_z} dxdy\right)dz,$$

där $D_z = \{(x,y) : |x|+|y| \le 1-z^4$. D_z är en kvadrat med sidan $\sqrt{2}(1-z^4)$ och arean $2(1-z^4)^2$, varför vi får

$$V = \int_{-1}^{1} 2(1-z^4)^2\,dz = 2\int_{-1}^{1}(1-2z^4+z^8)\,dz$$

$$= 4\int_0^1 (1-2z^4+z^8)\,dz = 4\left[z-\frac{2}{5}z^5+\frac{1}{9}z^9\right]_0^1$$

$$= 4(1-\frac{2}{5}+\frac{1}{9}) = \frac{128}{45}.$$

2.

Vi beräknar först

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = -4\sin^2 y-(2+2\cos 2y)$$

$$= -4\sin^2 y - 2 - 2(2\cos^2 y - 1)$$

$$= -4(\sin^2 y+\cos^2 y) = -4.$$

Om vi sätter $D = \{(x,y) : 4x^2+y^2 \le 4\,, x,y \ge 0\}$ och låter γ_1 och γ_2 vara de delar av x- respektive y-axlarna där $0 \le x \le 1$ ($0 \le y \le 2$) med de naturliga orienteringarna, så ger Greens formel:

$$\int_\gamma + \int_{-\gamma_2} + \int_{\gamma_1} = \iint_D,$$

dvs

$$\int_\gamma = \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} + \iint_D.$$

Nu blir båda kurv-integralerna 0 eftersom $2y+\sin 2y = 0$ på x-axeln och $-4x\sin^2 y = 0$ på y-axeln. Alltså blir

$$\int_\gamma (2y+\sin 2y)\,dx - 4x\sin^2 y\,dy$$

$$= \iint_D (-4)\,dxdy = -4\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi ab = -2\pi,$$

där vi använt formeln för arean av en ellips.

3.

En enkel räking ger att $\operatorname{rot}\mathbf{F} =$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ axy+2z & x^2+2yz & y^2+bx \end{vmatrix} = (0, 2-b, 2x-ax),$$

av vilket följer att fältet är ett potentialfält om och endast om $a=2$ och $b=2$, dvs

$$\mathbf{F} = (2xy+2z, x^2+2yz, y^2+2x).$$

För att hitta en potential integrerar vi den första komponenten m a p x vilket ger

$$U(x,y,z) = x^2y+2xz+G(y,z).$$

För att bestämma $G(y,z)$ deriverar vi m a p y och får

$$x^2+2yz = U'_y(x,y,z) = x^2+G'_y(y,z),$$

vilket ger att $2yz = G'_y(y,z)$, dvs $G(y,z) = y^2z+H(z)$ och alltså $U(x,y,z) = x^2y+2xz+y^2z+H(z)$. Till sist deriverar vi m a p z och får

$$2x+y^2+H'(z) = y^2+2x,$$

vilket visar att $H'(z)=0$. Vi kan därför helt enkelt välja $H(z)=0$ för alla z och får slutligen

$$U(x,y,z) = x^2y+2xz+y^2z.$$

4.

Genom att till Y lägga botten $Y_0 = \{x^2+y^2 \le 1\}$ (med normalen neråt) får vi en sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz.$$

där $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+4z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Vi får nu

$$\iint_{Y_1} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^3,y^3,1)\cdot(0,0,-1)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (-1)\,dxdy = -\pi.$$

Vidare får vi för divergensintegralen

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F} = \iiint_K 3(x^2+y^2)\,dxdydz.$$

Genom variabelbytet $x' = x, y' = y, z' = 2z$ övergår integralen i (vi forsätter för enkelhetens skull att skriva x,y,z):

$$= \frac{1}{2}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} 3(x^2+y^2)\,dxdydz.$$

Efter övergång till rymdpolära koordinater blir $x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta$ och $dxdydz = r^2\sin\theta$, vilket ger

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^1 r^4\,dr$$

$$= [t=\cos\theta] = \frac{3}{2}\pi\int_1^{-1}(1-t^2)(-dt)\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1$$

$$= \frac{3\pi}{10}\int_{-1}^1(1-t^2)\,dt = \frac{3\pi}{10}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \pi + \frac{2\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}.$$

5.

a) Integralen är generaliserad i både origo och oändligheten. Vi delar därför upp den i två:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Den första integralen har en positiv integrand och vi kan därför jämföra med $1/\sqrt{x}$ enligt jämförelsekriterium II. Eftersom

$$2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$$

följer att även

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx < \infty.$$

För den andra integralen kan vi observera att

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} < \infty$$

följer att

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$$

är absolutkonvergent och därmed konvergent. Sammanfattningsvis är båda integralerna i uppdelningen konvergenta varför den ursprungliga integralen också är det.

b) Sätt $z = 2x$. Vi får

$$\sum_{k=1}^\infty k(k+3)2^{k+1}x^k = 2\sum_{k=1}^\infty k(k+3)z^k$$

$$= 2z\sum_{k=1}^\infty k(k+3)z^{k-1} = 2z\sum_{k=1}^\infty (k+3)D(z^k) =$$

$$= 2zD\left(\sum_{k=1}^\infty (k+3)z^k\right) = 2zD\left(\frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^\infty (k+3)z^{k+2}\right)$$

$$= 2zD\left(\frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^\infty D(z^{k+3})\right) = 2zD\left(\frac{1}{z^2}D\left(\sum_{k=1}^\infty z^{k+3}\right)\right)$$

$$= 2zD\left(\frac{1}{z^2}D\left(\frac{z^4}{1-z}\right)\right).$$

Vi får efter en kort räkning:

$$\sum_{k=1}^\infty k(k+3)2^{k+1}x^k = \frac{4z(z-2)}{(z-1)^3} = \frac{16x(x-1)}{(2x-1)^3}.$$

För konvergensradien fås enligt känd formel $R = \lim_{k\to\infty}\frac{k(k+3)2^{k+1}}{(k+1)(k+4)2^{k+2}} = \frac{1}{2}$. I ändpunkterna $x = \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{1}{2}$ fås serierna

$$\sum_{k=1}^\infty 2k(k+3) \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^\infty 2(-1)^k k(k+3)$$

som båda är divergenta eftersom termerna inte går mot 0. Konvergensintervallet blir därför $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.